5. cvičení

Příklady

1. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$$

Řešení: Otestujeme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}-1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}-\lim_{n\to\infty}1=1-1=0.$$

Je vidět, že posloupnost je nerostoucí, tedy z Leibnize řada konverguje,

(b)

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\ln k}$$

Řešení: Řada konverguje podle Leibnizova kritéria, neboť $\frac{1}{\ln k}\xrightarrow{k\to\infty}0$. Posloupnost $\frac{1}{\ln k}$ je zjevně nerostoucí.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}$$

Řešení: Řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}=\frac{2}{3}\neq 0,$$

tedy řada diverguje.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+2}$

Řešení: Označme $b_n=\frac{n}{n^2+2}$. Zjevně je $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+2}=0$. Abychom ukázali monotónnost, uvažujme funkci $f(x)=\frac{x}{x^2+2}$. Její derivace je:

$$f'(x)=\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}.$$

Tedy platí, že $f'(x)<0$ pro $x>\sqrt{2}$. Odtud máme, že posloupnost b_n je klesající pro $n\geq 2$.

Řada pak konverguje z Leibnizova kritéria.

2. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{arccot}(n)$

Řešení: Položme $a_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ a $b_n = \operatorname{arccot} n$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty (bereme jako fakt). Posloupnost b_n je monotónní a navíc $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Z Dirichletova kritéria pak řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{arccot}(n)$ konverguje.

(b)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos 2k}{\ln k}$$

Řešení:

Neabsolutně řada konverguje z Dirichleta, neb $\cos 2k$ má omezené částečné součty a $1/\ln k \to 0$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

Řešení: Z Leibnize konverguje, neb $1/k \to 0$ a navíc je monotónní.

(d)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{k^2}{k^2+1}$$

Řešení: Podle Leibnizova kritéria konverguje řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Následně podle Abela konverguje také $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{k^2}{k^2+1}$, neboť posloupnost $\frac{k^2}{k^2+1}$ je monotónní a omezená:

$$0 \leq \frac{k^2}{k^2+1} \leq 1$$

a

$$a_k \leq a_{k+1},$$

protože

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{k^2+1} &\leq \frac{(k+1)^2}{(k+1)^2+1} \\ k^2(k^2+2k+2) &\leq (k^2+1)(k^2+2k+1) \\ k^4+2k^3+2k^2 &\leq k^4+2k^3+2k^2+2k+1 \\ 0 &\leq 2k+1 \end{aligned}$$

(e) Užijte faktu $2\sin^2 k = 1 - \cos 2k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$$

Řešení: Pomocí faktu výše píšeme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{k}.$$

První řada diverguje, druhá konverguje z Dirichleta (a faktů). Tedy součet vpravo je dobře definován a řada diverguje.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)\frac{\arctan n}{n}$

Řešení: Z Dirichleta konverguje řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$. Z Abela pak „přilepíme" člen $\arctan n$, který je omezený 1 a monotónní.

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$

Řešení:

Ze součtových vzorců máme

$$\sin\left(n+\frac{1}{n}\right) = \sin n \cos\frac{1}{n} + \cos n \sin\frac{1}{n}.$$

Řada $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln(\ln n)}$ pak konverguje z Dirichletova kritéria, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ má omezené částečné součty a $\frac{1}{\ln(\ln n)}$ jde monotónně k 0.

Protože $\cos\frac{1}{n}$ je omezená $|\cos\frac{1}{n}| \leq 1$ a jde monotónně do 1 (plyne např. z náčrtku funkce $\cos x$), tak konverguje z Abela i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos\frac{1}{n}}{\ln(\ln n)}$.

Analogicky se ukáže, že konverguje i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin\frac{1}{n}}{\ln(\ln n)}$.

A protože součet dvou konvergentních řad je konvergentní, konverguje i původní řada $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Řešení:

Neboť $\sin\frac{1}{n}$ jde monotónně do 0 (jde vidět z grafu), tak řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n}$ konverguje z Leibnize.

Jelikož pak $\frac{n}{n+1}$ je omezená a rostoucí (možno ukázat derivací), tak z Abela konverguje i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{2k+10}{3k+1}\right)^k$

Řešení: Řada konverguje absolutně podle odmocninového kritéria, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+10}{3k+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

Řešení: Pro $|z| < 1$ konverguje absolutně podle limitního podílového kritéria, neboť

$$\lim \frac{\frac{|(-1)^{n+2}||z|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|(-1)^{n+1}||z|^n}{n}} = \lim \frac{|z|}{1} \frac{n}{n+1} = |z| < 1.$$

Pro $|z| > 1$ diverguje, neboť limita koeficientů buď neexistuje nebo není nulová.
Pro $z = 1$ řada konverguje podle Leibnizova kritéria (neabsolutně), neboť posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je monotónní a konverguje k nule.
Pro $z = -1$ řada diverguje, neboť $\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = -1/n$ a řada $\sum -\frac{1}{n}$ je harmonická s minusem.

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$$

Řešení: Platí, že (pro $k \geq 4$)

$$\left|(-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}\right| = \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3} = \frac{1}{k^2}\frac{2+3/k+4/k^2}{2+3/k^4} \leq \frac{1}{k^2}\frac{2+1+1}{2} = \frac{2}{k^2}.$$

Tento odhad dává absolutní konvergenci naší řady pomocí srovnávacího kritéria.

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k^2\pi)\left(\sqrt{k+9} - \sqrt{k}\right)$$

Řešení: Platí, že k^2 je liché, právě když k je liché. Proto

$$\cos(k^2\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

Dále je

$$\sqrt{k+9}-\sqrt{k}=\frac{9}{\sqrt{k+9}+\sqrt{k}}\geq\frac{9}{\sqrt{k}}.$$

Z těchto výpočtů je zřejmé, že řada absolutně konvergovat nemůže (řada $\frac{9}{\sqrt{k}}$ není konvergentní), ale konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria.

(e)

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$$

Řešení:

Absolutní konvergence je vyloučena odhadem $\frac{1}{2k+(-1)^k}\geq\frac{1}{2k-1}$. Ukážeme, že řada konverguje neabsolutně.

Leibnizovo kritérium lze použít přímo, protože nerovnosti

$$2k+1\leq 2(k+1)-1,\quad 2k-1\leq 2(k+1)+1 \implies \frac{1}{2k+(-1)^k}\geq\frac{1}{2(k+1)+(-1)^{k+1}}$$

jsou pravdivé.

4.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k\sin k}{k^2+1}$$

Řešení:

Upravíme nyní člen řady na tvar

$$(-1)^k\frac{k\sin k}{k^2+1}=(-1)^k\frac{\sin k}{k}\cdot\frac{k^2}{k^2+1}.$$

Dokážeme-li nyní konvergenci řady $\sum_k(-1)^k\frac{\sin k}{k}$, pak, vzhledem k tomu, že posloupnost $\{\frac{k^2}{k^2+1}\}$ je evidentně omezená (má limitu) a monotónní, z Abelova kritéria bude vyplývat také neabsolutní konvergence vyšetřované řady.

Nyní použijeme **triku** rozdělení řady na dvě, na řadu sudých a lichých členů.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin k}{k}\stackrel{?}{=}\sum_{k=1,3,5,\ldots}(-1)^k\frac{\sin k}{k}+\sum_{k=2,4,6,\ldots}(-1)^k\frac{\sin k}{k}$$

což po úpravě dává

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin k}{k}\stackrel{?}{=}\sum_{k=1,3,5,\ldots}-\frac{\sin k}{k}+\sum_{k=2,4,6,\ldots}\frac{\sin k}{k}$$

Z následující poznámky plyne, že pokud dokážeme konvergenci řad na pravé straně, pak konverguje také řada na straně levé a rovnost s otazníkem platí.

Avšak konvergence obou řad na pravé straně plyne z Dirichletova kritéria. Protože $\frac{1}{k} \to 0$ monotónně, stačí ověřit stejnou omezenost částečných součtů řad $\sum_k \sin k$ sčítaných přes sudé a liché členy.

Řada $\sum_k \sin kx$ má totiž omezené částečné součty pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Položením $x = 2$ tedy zjišťujeme, že řada $\sum_k \sin(2k) = \sum_{k=2,4,\dots} \sin k$ má omezené částečné součty. A protože

$$\left| \sum_{k=1,3,5,\dots}^{N} \sin k \right| = \left| \sum_{k=1}^{N} \sin k - \sum_{k=2,4,6,\dots}^{N} \sin k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{N} \sin k \right| + \left| \sum_{k=2,4,6,\dots}^{N} \sin k \right|$$

a obě řady napravo mají stejně omezené částečné součty, plyne odtud stejná omezenost částečných součtů i pro řadu lichých členů. $\blacksquare$

Tím je neabsolutní konvergence vyšetřované řady dokázána.

5. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

   Řešení:

   $a_n = \frac{1}{n^2}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

   Řešení:

   $a_n = \frac{1}{n}$

   (c) $\limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

   Řešení:

   Liché členy budou $a_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)^2}$, sudé pak budou $a_{2k} = \frac{2}{(2k-1)^2}$, sudé pak budou