5. cvičení

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyukaMA2.php
kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Leibniz). Nechť $\{b_n\}$ je **monotónní** posloupnost, která konverguje k 0. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ konverguje.

Věta 2 (Abelovo-Dirichletovo kritérium). Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je **monotónní**. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

(A) posloupnost $\{b_n\}$ je **omezená** a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje**,

(D) $\lim b_n = 0$ a **posloupnost částečných součtů** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **omezená**.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Věta 3 (Abelovo kritérium 2). Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je **monotónní**. Nechť navíc posloupnost $\{b_n\}$ je **omezená** a $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Fakta

První fakt o „goniometrických“ řadách. Řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$$

sice divergují (mimo $x = 0$ modulo 2π u sinové řady), ale mají stejně omezené částečné součty pro:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Druhý fakt o „goniometrických“ řadách. Řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}$$

konvergují absolutně pro $\alpha > 1$. Sinová řada konverguje neabsolutně pro $0 < \alpha \le 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, absolutně však pouze pro $x = 2n\pi$, kde n je celé číslo (pak je řada nulová). Kosinová řada konverguje neabsolutně pro $x \in \mathbb{R}$ různá od $2n\pi$, kde n je celé číslo, pro $x = 2n\pi$ diverguje. Pro $\alpha \le 0$ řady vždy divergují.

Speciálně řady $\sum_k |\sin k|/k$ a $\sum_k |\cos k|/k$ divergují.

Hinty

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$2\sin^2 k = 1 - \cos 2k, \qquad 2\cos^2 k = 1 + \cos 2k$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Poznámky 4. Algoritmus:

1. Rychle zkoukneme, jestli řada splňuje nutnou podmínku.
2. Odhadneme, jestli by nemohla být absolutně konvergentní. Pokud ano, testujeme $\sum |a_n|$ kritérii pro nezáporné řady. Neabsolutní konvergence pak vyplyne.
3. Na AK to nevypadá, tedy:
   (a) Je to $(-1)^n b_n$, kde b_n jde k 0 monotónně? $\rightarrow$ Leibniz. Monotonii poctivě ověříme:
      i. Jak vypadá $a_{n+1} - a_n$ nebo a_{n+1}/a_n?
      ii. Převedeme b_n na funkci a zderivujeme - zjistíme, kde roste a klesá.
   (b) Je tam $\sin nx$ nebo $\cos nx$ krát b_n, která jde monotónně k 0? Dirichlet. Poctivě ověříme monotonii (jako u Leibnize).
   (c) Je tam konvergující řada krát něco omezeného? Zkusíme Abela. Opět ověříme monotonii.
4. Kritéria jde i kombinovat. Je tam $\sin nx$ krát něco jdoucí k 0 krát něco omezeného? Dirichlet a pak slepit Abelem. A pořád ověřujeme podmínky.
5. Varování: Víme, že $\sum \sin(nx)$ a $\sum \cos(nx)$ má omezené částečné součty. O výrazech $\sin^2 n$, $\cos(n+2)$ nebo $\sin n^2$ nevíme nic a musíme je prve upravit.

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují (neabsolutně).

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{3n^2 + 2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 2}$

2. Určete, zda následující řady konvergují (neabsolutně):

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{arccot}(n)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos 2k}{\ln k}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{k^2}{k^2+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \frac{\arctan n}{n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

3. Rozhodněte o **neabsolutní i absolutní konvergenci** následujících řad (v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$).

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+10}{3k+1}\right)^k$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k^2\pi) \left(\sqrt{k+9} - \sqrt{k}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k + (-1)^k}$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \sin k}{k^2+1}$

5. Zkonstruujte kladnou posloupnost a_n tak, že

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(c) $\displaystyle\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(2d) Leibniz a pak Abel.
(2e) $2\sin^2 k = 1 - \cos 2k$
(2f) Vyřešte prve $\sum \frac{\sin n}{n}$
(2g) Užijte součtové vzorce pro $\sin(a+b)$ (2h) Vyřešte prve $\sum (-1)^n \sin\frac{1}{n}$
(3d) Rozepište prvních pár členů $\cos(k^2\pi)$.
(4) Rozepište na $\frac{\sin k}{k} \cdot \frac{k^2}{k^2+1}$, použijte Abela. Ke konvergenci $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k}$ užijte Dirichleta a roztržení na sudé a liché členy.