3. cvičení

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyukaMA2.php
kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Pak $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$.

Poznámky 2. Algoritmus:

1. Najdeme x_n a funkci f tak, že složením $f(x_n)$ dostaneme a_n. (Např. pro $a_n = \sin\frac{1}{n}$ budeme mít $f(x) = \sin x$, $x_n = \frac{1}{n}$.
2. Zkontrolujeme, že x_n jde do 0.
3. Rozvineme $f(x)$ do Taylora. (Stupeň musíme odhadnout, ale musí tam zbýt nějaká x, nejen óčka.)
4. x v Taylorovi nahradíme zpátky x_n, tím získáme b_n pro LSK.
5. Provedeme LSK. Nezapomeneme použít Heineho, Taylora příp. Větu výše.
6. Uděláme závěr.
7. Varování: některé funkce je potřeba před rozvinutím do Taylora upravit, abychom rozvíjeli v 0.

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci řad.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right] - \frac{1}{n^{3/5}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{n^{\beta}} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^{\beta}}\right)$, $\beta > 0$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{p}$, $p \in \mathbb{R}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Bonus

2. Dokažte, nebo najděte protipříklad.

   (a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$.

   (b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

   (c) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.

   (d) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq 1$.

   (e) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq n_0$.

Source 1: https://mathjokes4mathyfolks.wordpress.com/2010/09/09/a-nice-and-funny-note/

- (1d) $\ln a - \ln b = \ln a/b$.
- (1f) $\sqrt{n+2} = \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{2}{n}}$.
- (1g) $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\left(1 - e^{n \ln(1+\frac{1}{n})-1}\right)$.