# 1. cvičení

`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyukaMA2.php`
kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## Teorie

**Věta 1** (nutná podmínka konvergence řady)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim a_n = 0$.

**Věta 2** (srovnávací kritérium )**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s **nezápornými** členy a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.

(a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

**Věta 3** (limitní srovnávací kritérium )**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s **nezápornými** členy a nechť existuje $\lim \frac{a_n}{b_n}$. Označme $K = \lim \frac{a_n}{b_n}$.

(a) Pokud $K \in (0, \infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

(b) Pokud $K = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Pokud $K = \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

**Věta 4** (vztah absolutní konvergence řady a konvergence řady)**.** Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, pak je i konvergentní.

**Věta 5** (Heineova)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $a$. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(i)
$$\lim_{x \to a} f(x) = A;$$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, splňující $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N} : \; x_n \neq a$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

## Fakta

1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje právě když $|q| < 1$.
2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.
3. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazýváme *harmonickou řadou.* Harmonická řada diverguje.
4. Řada $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha} \ln^{\beta} n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$ a $\beta \in \mathbb{R}$ nebo $\alpha = -1$ a $\beta < -1$.

## Hinty

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$
$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$$
$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\ldots+A^2B^{n-3}+AB^{n-2}+B^{n-1})$$
$$a^b = e^{b\ln a}$$

**Poznámky 6. Algoritmus:**

1. Jde $a_n$ k 0? Pokud ne, řada diverguje. (Pokud ano, nevíme nic.)
2. Má řada nezáporné členy? Pokud ne, zkusíme absolutní konvergenci (z ní vyplyne i konvergence).
3. Zkusíme najít řadu k LSK. Typicky jde o $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$.
   (a) Máme nějaký pěkný zlomek: Vytkneme nejsilnější člen v čitateli a ve jmenovateli - s tím budeme srovnávat.
   (b) Jsou tam odmocniny: Není potřeba je nejdřív upravit?
   (c) Jsou tam funkce: K čemu se blíží jejich argument? Neznáme nějakou limitu v tomto bodě? - Limita nám poradí, s čím srovnávat.
4. Umíme použít nějaký odhad zdola či shora? (např. $|\cos x| \leq 1$, $|\sin n| \leq n$, $\ln(x) \leq x-1$). Aplikujeme SK. (Pozor, je třeba odhadovat zdola divergentní a shora konvergentní řadou.)
5. Ještě jednou prokontrolujeme všechny implikace a podmínky. Napíšeme závěr.

## Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+1/n)^n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ln n}$

2. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^{-1} \ln\frac{n+1}{n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{(n^2+1)^{-1}} - 1\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \cos\frac{1}{n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{2n}{1+n^2},$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{2nx}{x^2+n^2},\ x \in \mathbb{R}.$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n}{n^2+1}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{n^a} - 1\right),\ a \in \mathbb{R}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin 2^n$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arccos\frac{1}{n}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)\sqrt{\sin\frac{1}{n}}$

## Bonus

3. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jsou divergentní (ne nutně s kladnými členy). Rozhodněte, zda musí platit:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ je konvergentní.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n + d_n$ je divergentní.

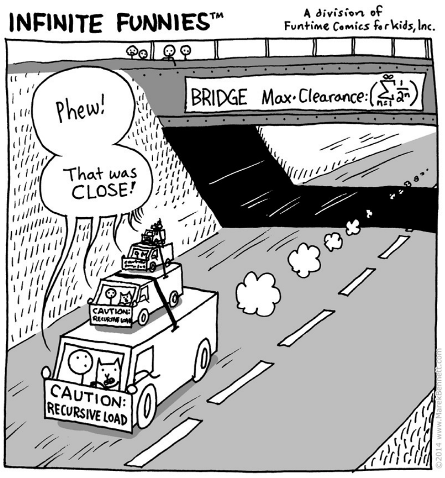
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$ je konvergentní.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n + l \cdot b_n$, kde $k, l \in \mathbb{R}$, je konvergentní.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ je konvergentní.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$ je konvergentní.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot d_n$ je konvergentní.




Source 1: https://marekbennett.com/2014/03/06/recursive-load

- (1g) $\ln n \leq n$.
- (1h) SK s $1/n^2$.