

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}.$$

(15 bodů)

Řešení :

- Definiční obor: jediná omezení na definiční obor klade jmenovatel zlomku, tedy definiční obor f , $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$ (neboť je složením spojitých funkcí \exp , arctg , a podílu dvou spojitých funkcí, přičemž jmenovatel $x^2 - 1$ je na $\mathcal{D}(f)$ nenulový), dále je f na $\mathcal{D}(f)$ sudá a kladná ($f > 0$ na $\mathcal{D}(f)$).
- Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \exp \frac{\pi}{2} \approx 4.81 && (= \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \text{ ze sudosti}), \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \exp \left(-\frac{\pi}{2}\right) \approx 0.208 && (= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)), \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= 1, && \text{odkud rovněž plyne } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0. \end{aligned}$$

Poslední dvě (dvoj)limity tedy zároveň říkají, že asymptotou funkce f jak v $+\infty$, tak v $-\infty$, je přímka $y = 1$.

- První derivace: pro $x \in \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ je

$$f'(x) = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2} \cdot (-1) \frac{2x}{(x^2-1)^2} = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} \frac{-2x}{(x^2-1)^2 + 1},$$

funkce f tedy roste na $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$, a klesá na $(0, 1)$ a na $(1, +\infty)$. V bodě 0 je tedy lokální maximum hodnoty $f(0) = \exp(-\pi/4) \approx 0.456$, $f'(0) = 0$. V bodech ± 1 není f definovaná, nemá tam tedy ani jednostranné derivace z žádné ze stran. Pro náčrt grafu je však možná dobré si spočítat limitní polohy tečen, tj. limity derivací (pozor na znaménka derivace v symetrických bodech, derivace sudé funkce je funkce lichá):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) &= - \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{e^\pi}} \approx -0.416, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) &= - \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -2\sqrt{e^\pi} \approx -9.62. \end{aligned}$$

- Obor hodnot: uvážením všech dosud získaných informací vidíme (náčrtek jistě také pomůže), že obor hodnot

$$\mathcal{H}(f) = \left(\exp\left(-\frac{\pi}{2}\right), \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \cup \left(1, \exp\left(\frac{\pi}{2}\right) \right).$$

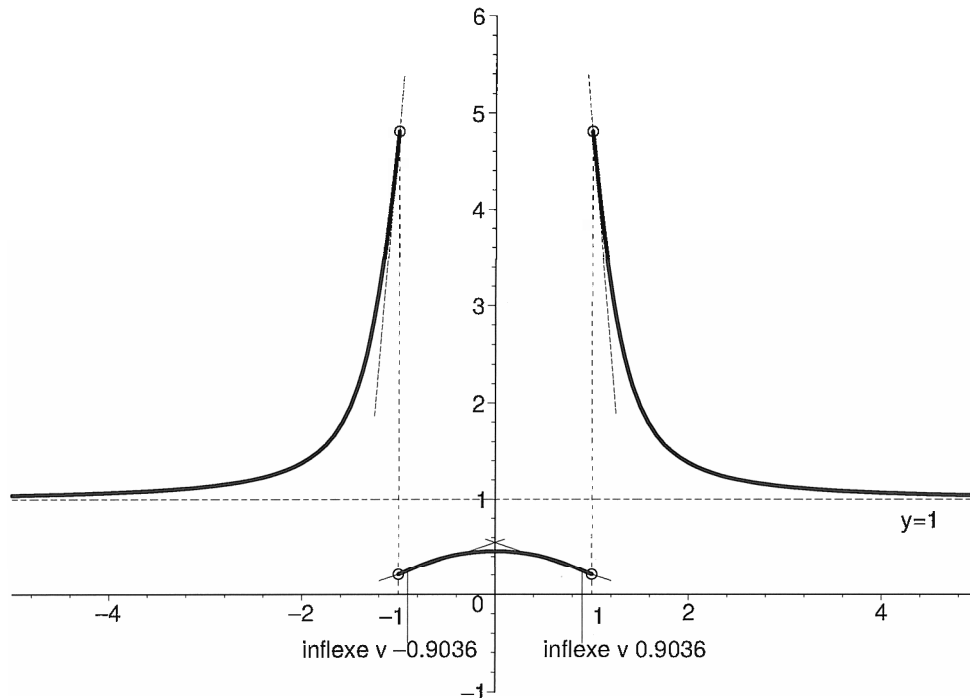
- Druhá derivace po úpravě vyjde:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} \left[\left(\frac{-2x}{(x^2-1)^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{-2x}{(x^2-1)^2 + 1} \right)' \right] = \\ &= e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} \left[\frac{4x^2 - 2((x^2-1)^2 + 1) + 2x \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{((x^2-1)^2 + 1)^2} \right] = \\ &= 2e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)} \frac{3x^4 - 2}{((x^2-1)^2 + 1)^2} \quad x \neq -1, 1. \end{aligned}$$

Pouze čitatel zlomku výše mění znaménko. Výraz v čitateli má dva reálné kořeny $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{2/3} \approx \pm 0.9036 \in \mathcal{D}(f)$.

Funkce f je tedy konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, -\sqrt[4]{2/3})$, $(\sqrt[4]{2/3}, 1)$ a $(1, +\infty)$, a konkávní na $(-\sqrt[4]{2/3}, \sqrt[4]{2/3})$, a v bodech $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{2/3}$ má inflexní body.

- Graf funkce f , načrtnutý na základě všech výše uvedených informací, je tento:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor 1 bod
- spojitost, sudost 1 bod
- limity v krajích definičního oboru, asymptoty 2 body
- výpočet první derivace 1 bod
- monotonie, lokální extrém, limity derivací 2 body
- obor hodnot 2 body
- výpočet druhé derivace 2 body
- konvexita, konkávita, inflexe 2 body
- graf 2 body

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3},$$

kde „třetí odmocninou“, tj. funkcí $\sqrt[3]{z}$, rozumíme funkci inverzní k funkci $z^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(15 bodů)

Řešení :

- Definiční obor: lichá odmocnina z reálného čísla je definovaná pro všechna reálná čísla, proto $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.
- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$.
- Význačné hodnoty funkce (nebylo nutno zkoumat, pouze pomáhají): $f(x) = 0 \iff x = 0$ nebo $x = 3$, $f(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$, $f(x) < 0$ pro $x \in (3, +\infty)$.
- Limity v krajních bodech definičního oboru: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = \mp\infty$.
- Odtud a ze spojitosti f na \mathbb{R} plyne, že obor hodnot $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$.
- Dále lze ihned spočítat asymptoty v $\pm\infty$:

$$a := \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = -1,$$

a

$$\begin{aligned} b &:= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{\sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^2 - x^3\sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{x} - 1\right)^2 - \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} + 1}} = 1, \end{aligned}$$

existuje tedy asymptota, tatáž v obou nekonečnách, a sice $y = -x + 1$.

- První derivace (zde i dále užíváme pro větší přehlednost zápisu konvence $\sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}}$, myslíme tím ovšem stále třetí odmocninu jako inverzní funkci ke třetí mocnině, tedy odmocninu definovanou pro všechna reálná čísla):

$$f'(x) = ((3x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}})' = \frac{6x - 3x^2}{3(3x^2 - x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2 - x}{x^{\frac{1}{3}}(3 - x)^{\frac{2}{3}}}, \quad x \neq 0, 3,$$

funkce f tedy roste na $(0, 2)$ a klesá na $(-\infty, 0)$ a na $(2, +\infty)$. V bodě 0 je lokální minimum hodnoty $f(0) = 0$, v bodě 2 je lokální maximum $f(2) = \sqrt[3]{32} \approx 1.587$, $f'(x) = 0 \iff x = 2$. Dále, protože f je spojitá (z obou stran) v bodě 0 i v bodě 3:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty, \quad \text{tj. } f'(0) \text{ neexistuje,}$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = f'_-(3), \quad \text{tj. existuje } f'(3) = -\infty.$$

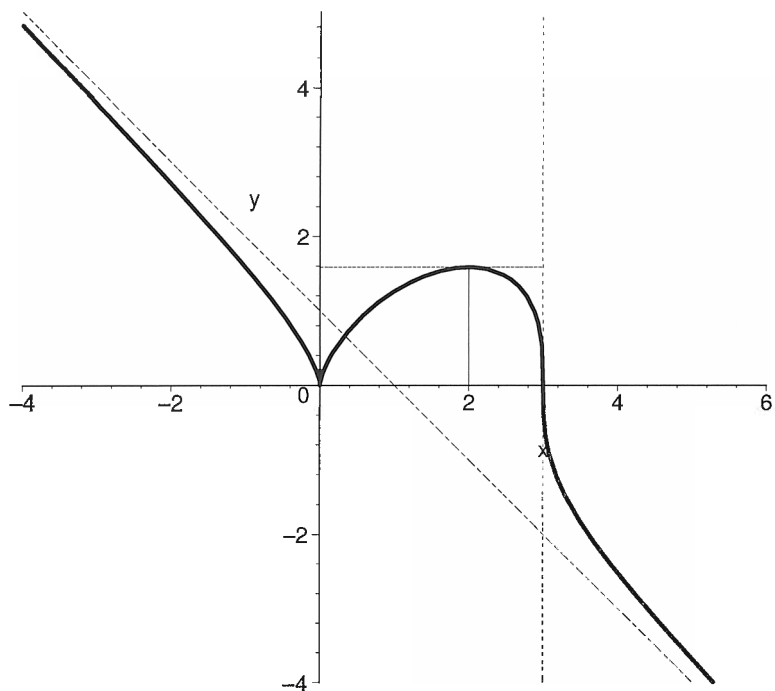
Derivaci v bodě 3 lze spočítat i z definice, $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - x^3} - \sqrt[3]{3 \cdot 3^2 - 3^3}}{x - 3} = -\infty$ například pomocí l'Hospitalova pravidla, což vede opět na výpočet $\lim_{x \rightarrow 3} f'(x)$.

- Druhá derivace po úpravě vychází:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2 - x}{x^{\frac{1}{3}}(3 - x)^{\frac{2}{3}}} \right)' = \frac{-x^{\frac{1}{3}}(3 - x)^{\frac{2}{3}} - (2 - x) \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(3 - x)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}(3 - x)^{-\frac{1}{3}} \right)}{x^{\frac{2}{3}}(3 - x)^{\frac{4}{3}}} = \\ &= \frac{-x(3 - x) - (2 - x) \left(\frac{1}{3}(3 - x) - \frac{2}{3}x \right)}{x^{\frac{4}{3}}(3 - x)^{\frac{5}{3}}} = -\frac{2}{x^{\frac{4}{3}}(3 - x)^{\frac{5}{3}}} \quad x \neq 0, 3. \end{aligned}$$

Funkce je tedy konvexní na intervalu $(3, +\infty)$, a konkávní na $(-\infty, 0)$ a na $(0, 3)$.

- Graf:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

• definiční obor	1 bod
• spojitost	1 bod
• limity v krajích definičního oboru, asymptoty	2 body
• obor hodnot	1 bod
• výpočet první derivace	1 bod
• jednostranné derivace (limity derivací) a derivace v bodě 3	2 body
• monotonie, lokální extrémny	2 body
• výpočet druhé derivace	2 body
• konvexita, konkávita	1 bod
• graf	2 body

Nejčastější chyby, kterých je dobré se příště vyvarovat:

- nspecifikování bodů, pro které neplatí obecný vzorec pro f' resp. f''
- neověření jednostranné spojitosti při výpočtu jednostranné derivace jako limity derivací
- tvrzení, že f klesá na $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- tvrzení, že f je konkávní na $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2 \log x}{1 + \log^2 x}\right),$$

kde $\log x (= \ln x)$ je přirozený logaritmus (logaritmus o základu e). (15 bodů)

Řešení :

- Definiční obor: musí platit $x > 0$ a zároveň $-1 \leq \frac{2 \log x}{\log^2 x + 1} \leq 1$. Odtud tedy $\mathcal{D}(f) = (0, +\infty)$.
- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$, z tvaru definičního oboru plyne, že nemá smysl uvažovat symetrie (sudost, lichost, periodicitu), $f \geq 0$ na $\mathcal{D}(f)$, a dále je (např.) $f(1) = \pi/2$.
- Obor hodnot: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$, $f(x) = \pi \Leftrightarrow x = 1/e$, funkce f je (mimo jiné) spojitá na uzavřeném intervalu $(1/e, e)$, nabývá tedy i všech mezihodnot mezi 0 a π . Protože funkce \arccos jiných hodnot nabýt nemůže, je obor hodnot $[0, \pi]$.
- Limity v krajních bodech definičního oboru: protože $\frac{2 \log x}{1 + \log^2 x} = \frac{2}{\frac{1}{\log x} + \log x}$ konverguje k nule jak pro $x \rightarrow 0+$, tak pro $x \rightarrow +\infty$, a protože $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, a navíc funkce \arccos je spojitá v nule, plyne z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{odkud rovněž plyne} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Poslední dvě limity tedy zároveň říkají, že přímka $y = \frac{\pi}{2}$ je asymptotou v $+\infty$.

- První derivace: pro $x \in \mathcal{D}(f') = (0, +\infty) \setminus \{\frac{1}{e}, e\}$ je

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4 \log^2 x}{(\log^2 x + 1)^2}}} \cdot \frac{\frac{2}{x}(\log^2 x + 1) - 2 \log x \cdot \frac{2}{x} \log x}{(\log^2 x + 1)^2} = \\ &= -\frac{\sqrt{(\log^2 x + 1)^2}}{\sqrt{(\log^2 x - 1)^2}} \cdot \frac{2 - 2 \log^2 x}{x(\log^2 x + 1)^2} = \frac{2(\log^2 x - 1)}{x(\log^2 x + 1)|\log^2 x - 1|} = \frac{2 \operatorname{sgn}(\log^2 x - 1)}{x(\log^2 x + 1)}. \end{aligned}$$

Dále,

$$\begin{aligned} f'_+(e) &= \lim_{x \rightarrow e+} f'(x) = \frac{1}{e}, & f'_-(e) &= \lim_{x \rightarrow e-} f'(x) = -\frac{1}{e}, \\ f'_+\left(\frac{1}{e}\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}+} f'(x) = -e, & f'_-\left(\frac{1}{e}\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}-} f'(x) = e, \end{aligned}$$

protože f je spojitá v bodě e i v bodě $1/e$ a protože příslušné limity derivací existují.

Funkce f klesá na $(1/e, e)$, roste na $(0, 1/e)$ a na $(e, +\infty)$. V bodě $1/e$ je lokální maximum hodnoty π , v bodě e je lokální minimum hodnoty 0 . S ohledem na obor hodnot jde v obou případech také o globální extrémy. Hodí se též spočítat si $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = +\infty$, i když derivace $f'_+(0)$ není definována (f není definována v 0).

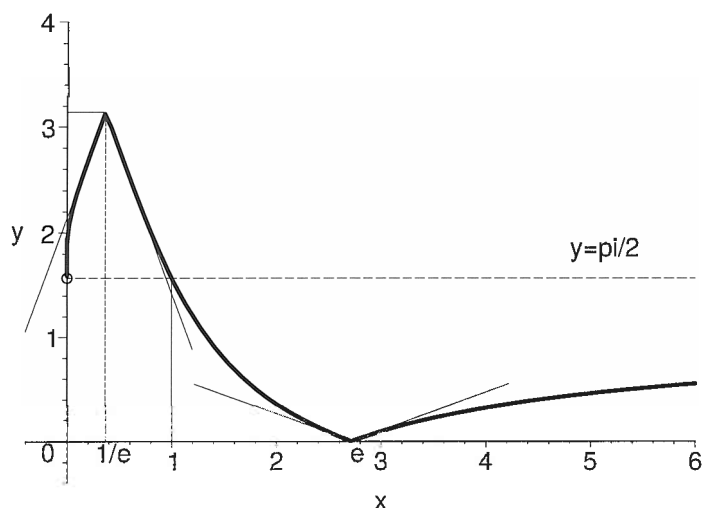
- Druhá derivace:²

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \operatorname{sgn}(\log^2 x - 1) \left(\frac{1}{x(\log^2 x + 1)} \right)' = -2 \operatorname{sgn}(\log^2 x - 1) \frac{\log^2 x + 1 + 2 \log x}{x^2 (\log^2 x + 1)^2} = \\ &= \underbrace{-\frac{2(\log x + 1)^2}{x^2 (\log^2 x + 1)^2}}_{<0} \operatorname{sgn}(\log^2 x - 1), \quad x \neq \frac{1}{e}, e. \end{aligned}$$

f je tedy konvexní na $(1/e, e)$ a konkávní na $(0, 1/e)$ a na $(e, +\infty)$. Funkce nemá inflexní body.

²Nebojte se derivovat sgn , mimo body e a $1/e$ je to konstanta, tudíž ji lze vytknout z derivovaného výrazu.

- Graf:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor 1 bod
- spojitost 1 bod
- limity v krajích definičního oboru 1 body
- asymptota 1 bod
- obor hodnot 1 bod
- výpočet první derivace 2 body
- jednostranné derivace (limity derivací) v e a $1/e$ 1 bod
- monotonie, lokální extrémy 2 body
- výpočet druhé derivace 2 body
- konvexita, konkávita 1 bod
- graf 2 body

Některé časté chyby, kterých je dobré se příště vyvarovat:

- neuvedení bodů e a $1/e$, pro které neplatí obecný vzorec pro f' resp. f''
- odmocňování podle schématu „ $\sqrt{A^2} = A$ “, přičemž správně je $\sqrt{A^2} = |A|$
- neověření jednostranné spojitosti při výpočtu jednostranné derivace jako limity derivací
- tvrdit, že existuje jednostranná derivace v bodě, ve kterém není funkce definovaná

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \frac{|1+x|}{\sqrt[3]{x}}.$$

(15 bodů)

Řešení :

- Definiční obor: jediná omezení na definiční obor klade jmenovatel zlomku, tedy definiční obor $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$, protože je součtem, podílem a složením spojitých funkcí, přičemž jmenovatel zlomku je na definičním oboru nenulový. Funkce není sudá, lichá, periodická. Dále platí $f(x) = 0$ právě když $x = -1$; $f(x) > 0$ pro $x > 0$, a $f(x) < 0$ pro $x < 0$.
- Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty,$$

například podle věty o limitě typu „ $\frac{A}{0}$ “, a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

například s využitím l'Hospitalova pravidla „ $\frac{c}{\infty}$ “ (váš výpočet by ovšem měl být o něco podrobnější).

- Asymptoty: není těžké spočítat, že

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 1}{\sqrt[3]{x}} = 0 =: a,$$

proto

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

proto asymptota v nekonečno (a podobně i asymptota v mínus nekonečno) neexistuje.

- Pro výpočet první derivace je dobré si například uvědomit, že $|1+x| = (1+x)\operatorname{sgn}(1+x)$, tedy

$$f'(x) = \left(\operatorname{sgn}(1+x) \frac{1+x}{x^{\frac{1}{3}}} \right)' = \operatorname{sgn}(1+x) \left(\frac{1+x}{x^{\frac{1}{3}}} \right)', \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\},$$

protože $(\operatorname{sgn}(1+x))' = 0$ na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Kdo se však bojí derivovat absolutní hodnotu, může samozřejmě uvažovat f separátně pro $x < -1$ a $x > -1$. Tak či tak, dostaneme:

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(1+x) \left(\frac{1+x}{x^{\frac{1}{3}}} \right)' = \operatorname{sgn}(1+x) \frac{2x-1}{3x^{\frac{4}{3}}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} = \mathcal{D}(f) \setminus \{-1\}.$$

Odtud snadno plyne, že funkce f roste na $(-\infty, -1)$ a $(\frac{1}{2}, +\infty)$, a klesá na $(-1, 0)$ a na $(0, \frac{1}{2})$. V bodě -1 je lokální maximum hodnoty $f(-1) = 0$, v bodě $\frac{1}{2}$ je lokální minimum hodnoty $f(1/2) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \approx 1.89$. Funkce nemá žádné globální extrémy.

- Jednostranné derivace v bodě -1 spočteme jako limitu derivací z příslušné strany, neboť f je spojitá v bodě -1 :

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = 1, \quad f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = -1, \quad \text{tj. } f'(-1) \text{ neexistuje.}$$

- Obor hodnot: funkce f je spojitá na $(-\infty, 0)$, v obou krajních bodech tohoto intervalu má (z příslušné strany) limitu $-\infty$, a nabývá na tomto intervalu lokální (a vzhledem k tomuto intervalu i globální) maximum hodnoty 0. Podle věty o nabývání mezihodnot je tedy $f(-\infty, 0) = (-\infty, 0)$. Podobnou úvahou dostaneme $f(0, \infty) = \langle \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \infty \rangle$, celkově tedy:

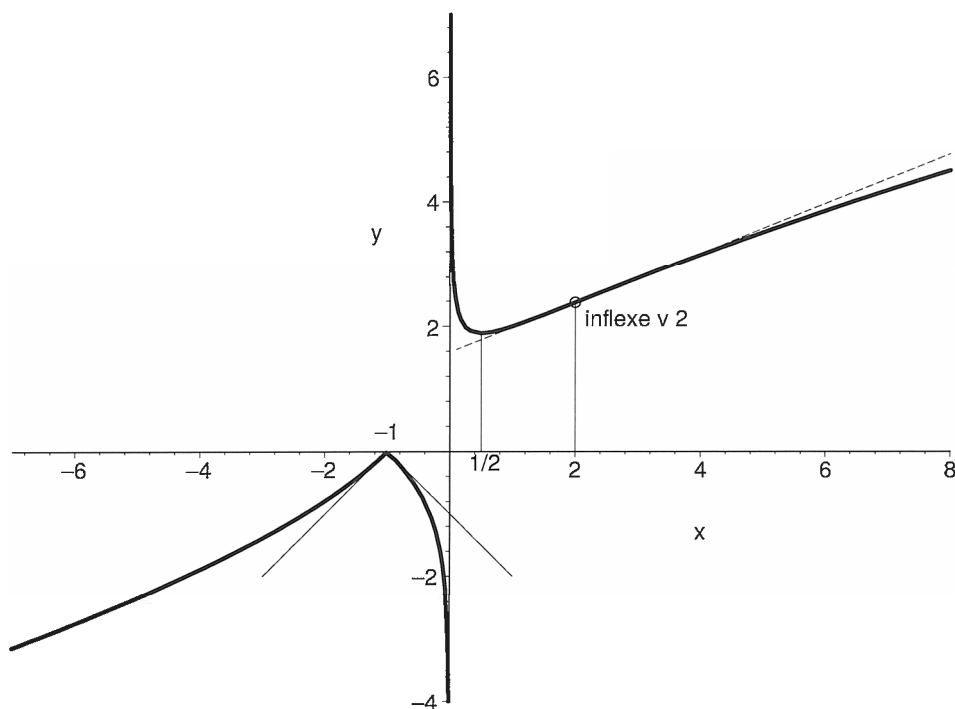
$$\mathcal{H}(f) = (-\infty, 0) \cup \left\langle \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \infty \right\rangle.$$

- Druhá derivace po nepříliš složitém výpočtu vyjde:

$$f''(x) = \operatorname{sgn}(1+x) \left(\frac{2x-1}{3x^{\frac{4}{3}}} \right)' = \frac{2}{9} \operatorname{sgn}(1+x) \frac{2-x}{x^{\frac{7}{3}}} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

Funkce tedy má inflexní bod $x = 2$, derivace v něm je $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \approx 0.397$, funkce je konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, 2)$, a konkávní na $(-1, 0)$ a $(2, +\infty)$.

- Graf:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor 1 bod
- spojitost 1 bod
- obor hodnot 2 body
- limity v obou nekonečnách a jednostranné limity v nule 1 bod
- neexistence asymptot 1 bod
- výpočet první derivace 1 bod
- jednostranné derivace (limity derivací) 1 bod
- monotonie, lokální extrém 2 body
- výpočet druhé derivace 1 bod
- konvexita, konkávnita 1 bod
- inflexní bod 1 bod
- graf 2 body

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^3 + 1}}.$$

(15 bodů)

Řešení :

- Definiční obor: druhá odmocnina je definovaná pro nezáporná reálná čísla, a jmenovatel zlomku musí být nenulový, tedy $\mathcal{D}(f) = (-1, +\infty)$.
- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$ (je součtem, součinem, podílem a složením spojitých funkcí), není sudá, lichá, periodická. Platí, že $f \geq 0$ na celém definičním oboru, přičemž $f > 0$ právě když $x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{0\}$, $f(x) = 0$ právě když $x = 0$.

- Limity v krajních bodech definičního oboru, obor hodnot, asymptota:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^3}}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x|}{\sqrt{x^3 + 1}} = +\infty.$$

Protože je f spojitá na $(-1, +\infty)$, a $f(0) = 0$, dává věta o nabývání mezihodnot, že oborem hodnot f jsou všechna nezáporná reálná čísla, $\mathcal{H}(f) = (0, +\infty)$. Limita výše zároveň říká, že $a := \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = 0$. Protože $b := \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - a \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, existuje asymptota v $+\infty$, a sice $y = 0$.

- První derivace: pro $x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$ je

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^3+1}}} \cdot \frac{2x(x^3+1) - 3x^2 \cdot x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{x\sqrt{x^3+1}}{|x|(x^3+1)^2} (2-x^3) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x \frac{(2-x^3)}{(x^3+1)^{3/2}}.$$

- Protože funkce f je spojitá (mimo jiné i) v bodě 0, a protože níže uvedené limity existují, platí:

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} f'(x) = \pm 1,$$

tedy $f'(0)$ neexistuje.

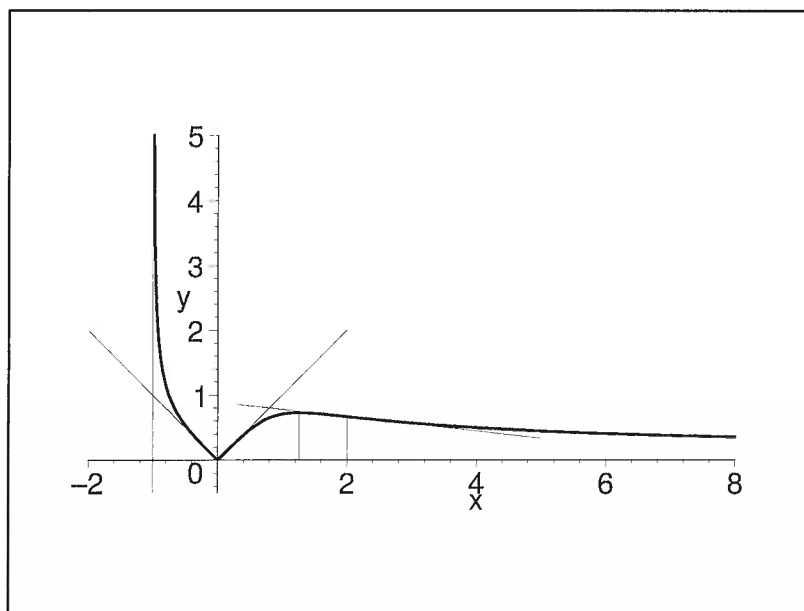
- Funkce f tedy roste na $(0, \sqrt[3]{2})$ a klesá na $(-1, 0)$ a na $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$. V bodě 0 je lokální (i globální) minimum 0, a v bodě $\sqrt[3]{2}$ je lokální maximum hodnoty $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{4}}{3}} \approx 0.727$. Funkce nemá globální maximum.

- Druhá derivace: pro $x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$ dostaneme

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x \frac{(-3x^2)(x^3+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(2-x^3)(x^3+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 3x^2}{(x^3+1)^3} = \\ &= -\frac{3x^2}{2} \operatorname{sgn} x \cdot \frac{2(x^3+1) + 3(2-x^3)}{2(x^3+1)^{\frac{5}{2}}} = \\ &= -\frac{3x^2}{4(x^3+1)^{\frac{5}{2}}} \cdot (8-x^3) \operatorname{sgn} x. \end{aligned}$$

Funkce je tedy konkávní na intervalu $(0, 2)$, a konvexní na intervalech $(-1, 0)$ a $(2, +\infty)$. Funkce má inflexní bod $x = 2$ ($f'(2) = -\frac{1}{9}$).

- Graf:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor 1 bod
- spojitost 1 bod
- obor hodnot 1 bod
- limity v krajních bodech def. oboru 1 bod
- asymptota 1 bod
- výpočet první derivace 1 bod
- jednostranná derivace v 0 (limity derivace) 1 bod
- monotonie, lokální extrémů 2 body
- výpočet druhé derivace 2 body
- konvexita, konkávita 1 bod
- inflexní bod 1 bod
- graf 2 body

Příklad 4 : Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = \frac{1}{2} \arccos(1 - \log^2 x),$$

kde $\log x (= \ln x)$ je přirozený logaritmus (logaritmus o základu e). (15 bodů)

Řešení :

- Definiční obor: musí platit $x > 0$ a zároveň $-1 \leq 1 - \log^2 x \leq 1$, tedy $0 \leq \log^2 x \leq 2$, neboli $-\sqrt{2} \leq \log x \leq \sqrt{2}$. Celkově tedy máme $\mathcal{D}(f) = \langle e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}} \rangle$.
- f je spojitá na celém $\mathcal{D}(f)$, neboť je součinem, rozdílem a složením spojitých funkcí. Definiční obor ukazuje, že funkce nemá symetrie (není sudá, lichá, periodická). Dále je $f \geq 0$ na $\mathcal{D}(f)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- Limity v krajních bodech definičního oboru jsou díky spojitosti funkce v těchto bodech rovny přímo funkčním hodnotám:

$$f(e^{-\sqrt{2}}) = f(e^{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} \arccos(1 - 2) = \frac{\pi}{2}.$$

- První derivace (výrazy ve jmenovateli určují, pro která x tento výpočet neplatí):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)}{\sqrt{1 - (1 - \log^2 x)^2}} \cdot \frac{(-2 \log x)}{x} = \frac{\log x}{x \sqrt{2 \log^2 x - \log^4 x}} = \\ &= \frac{\log x}{x |\log x| \sqrt{2 - \log^2 x}} = \frac{\operatorname{sgn}(\log x)}{x \sqrt{2 - \log^2 x}}, \quad x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{e^{-\sqrt{2}}, 1, e^{\sqrt{2}}\}. \end{aligned}$$

Funkce f je spojitá v bodech $e^{-\sqrt{2}}$ (zprava), 1 (oboustranně), $e^{\sqrt{2}}$ (zleva), proto lze jednostranné derivace v těchto bodech získat takto (pokud tedy příslušné limity derivací existují, což, jak ukáže výpočet, platí):

$$f'_+(e^{-\sqrt{2}}) = \lim_{x \rightarrow e^{-\sqrt{2}+} } f'(x) = -\infty, \quad f'_-(e^{\sqrt{2}}) = \lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}-} } f'(x) = +\infty,$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

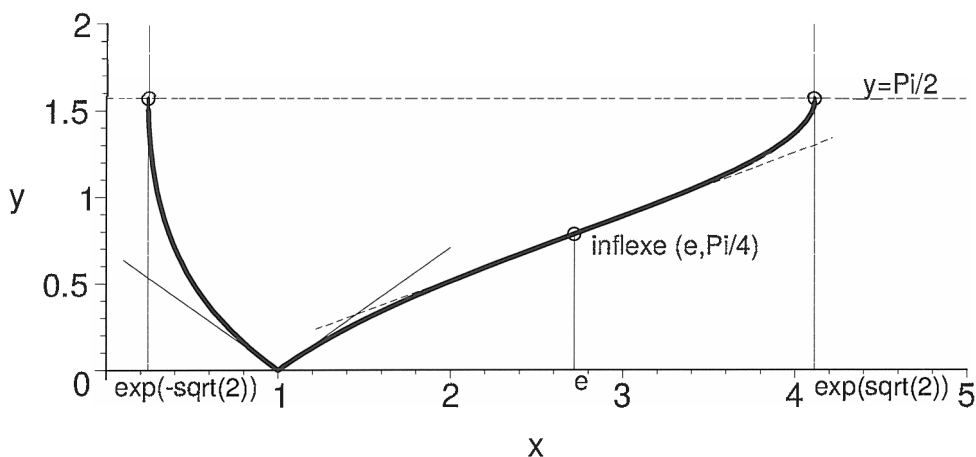
Z hodnot posledních dvou limit plyne, že derivace $f'(1)$ neexistuje.

- Funkce f klesá na $\langle e^{-\sqrt{2}}, 1 \rangle$ a roste na $\langle 1, e^{\sqrt{2}} \rangle$. V bodě 1 je lokální (i globální) minimum hodnoty 0, v bodech $e^{-\sqrt{2}}$ a $e^{\sqrt{2}}$ jsou globální maxima hodnoty $\frac{\pi}{2}$.
- Obor hodnot je tedy $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, asymptoty v nekonečnách nemá smysl uvažovat.
- Druhá derivace:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \operatorname{sgn}(\log x) \cdot \frac{-\left(\sqrt{2 - \log^2 x} - \frac{\log x}{\sqrt{2 - \log^2 x}}\right)}{x^2(2 - \log^2 x)} = \operatorname{sgn}(\log x) \frac{\log^2 x + \log x - 2}{x^2 \sqrt{(2 - \log^2 x)^3}}, \\ &x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{e^{-\sqrt{2}}, 1, e^{\sqrt{2}}\}. \end{aligned}$$

Řešením kvadratické rovnice $\log^2 x + \log x - 2 = 0$ dostaneme $\log x = -2$, $\log x = 1$. První kořen leží mimo definiční obor, tedy $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$. Výraz ve jmenovateli nemění znaménko, tedy dostaneme, že f je konvexní na $\langle e^{-\sqrt{2}}, 1 \rangle$ a na $\langle e, e^{\sqrt{2}} \rangle$, je konkávní na $\langle 1, e \rangle$. V bodě $[e, \frac{\pi}{4}]$ je inflexní bod, hodnota derivace v tomto bodě je $f'(e) = \frac{1}{e}$.

- Graf:



Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- definiční obor 1 bod
- spojitost 1 bod
- obor hodnot 1 bod
- výpočet první derivace 2 body
- jednostranné derivace (limity derivací) v $e^{-\sqrt{2}}, 1, e^{\sqrt{2}}$ 2 body
- monotonie, lokální extrémů 2 body
- výpočet druhé derivace 2 body
- konvexita, konkávita 1 bod
- inflexní bod 1 bod
- graf 2 body

Některé časté chyby, kterých je dobré se příště vyvarovat:

- neuvedení bodů $e^{-\sqrt{2}}, 1, e^{\sqrt{2}}$, pro které neplatí obecný vzorec pro f' resp. f''
- odmocňování podle schématu „ $\sqrt{A^2} = A$ “, přičemž správně je $\sqrt{A^2} = |A|$
- neověření jednostranné spojitosti při výpočtu jednostranné derivace jako limity derivací

Z (1) a (2) plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+1)}{n^2} = 0$. Odtud, z (3) a z věty o aritmetice limit plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + \sin(n+1)) \cdot (\sqrt{n^4 + 2} - \sqrt{n^4 + 1}) = \frac{1}{2}.$$

Příklad B2 : Použijeme Leibnizova kritéria. Ověřme jeho předpoklady:

- (1) řada má požadovaný tvar,
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{3} - 1) = 0$,
- (3) $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{3} - 1 \geq \sqrt[n+1]{3} - 1$ (lze snadno odvodit ze zřejmé nerovnosti $3^{n+1} \geq 3^n$, $n \in \mathbb{N}$).

Řada tedy konverguje.

Příklad B3 : Pišme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}.$$

Víme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$. Zabývejme se teď první limitou ve výše uvedeném součinu limit.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} - \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\arcsin x} \cdot \frac{\arcsin x}{x} = 2 - 1 = 1.$$

Použili jsme

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$,
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
- (3) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
- (4) \sin je prostá funkce na jistém okolí 0,
- (5) \arcsin je prostá funkce,
- (6) $x \mapsto 2x$ je prostá funkce,
- (7) větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1),
- (8) větu o aritmetice limit.

Dohromady tedy máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

Příklad B4 : Funkce arctg i tg mají derivace všude ve svém definičním oboru. Máme tedy

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^4 x} \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}; \quad x \neq \pi/2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

po úpravě dostaneme

$$f'(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x}; \quad x \neq \pi/2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Platí také $\lim_{x \rightarrow \pi/2 + k\pi} f(x) = \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, a f je tedy spojitá v každém bodě tvaru $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Spočtěme

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2 + k\pi} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2 + k\pi} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 0.$$

Věta o výpočtu derivace pomocí limity derivace tedy dává (předpoklady jsou splněny!) $f'(\pi/2 + k\pi) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Příklad B5 : Snadno je vidět, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a f je 2π periodická a spojitá na \mathbb{R} . Spočtěme f' :

$$f'(x) = e^{\frac{2}{3} \sin x} \left(\frac{2}{3} \cos^2 x - \sin x \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

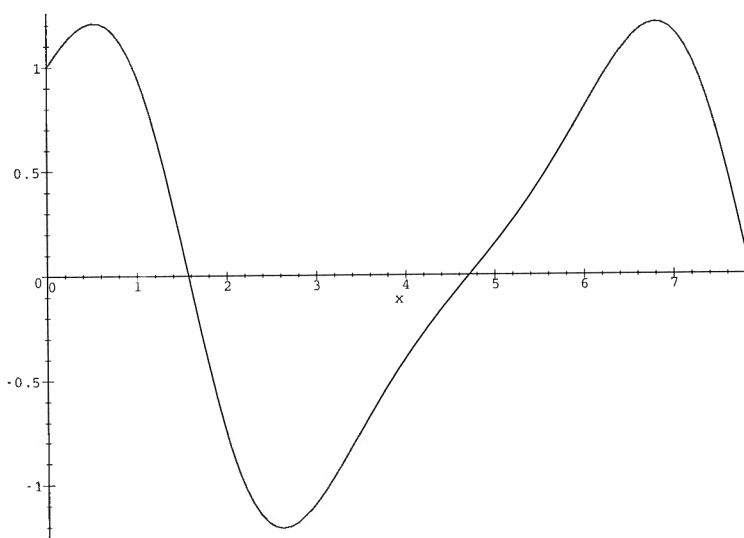
Prozkoumáme-li znaménko f' obdržíme:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (5\pi/6, 13\pi/6) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi/6, 5\pi/6) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pi/6, 5\pi/6\} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funkce f je tedy rostoucí na intervalech tvaru $(5\pi/6, 13\pi/6) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Na intervalech tvaru $(\pi/6, 5\pi/6) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je f klesající. Funkce f má v bodech $\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, globální maxima a v bodech $5\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, globální minima - toto vyplývá z výše uvedeného; $\mathcal{H}(f) = \langle f(5\pi/6), f(\pi/6) \rangle$. Funkce nemá žádné asymptoty.



Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n,$$

kde $\log x (= \ln x)$ je přirozený logaritmus (logaritmus o základu e). (15 bodů)

Řešení : Položme

$$a_n := \frac{n+1}{n+3} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n.$$

Protože $\frac{n+3}{n+1} > 1$, je $a_n > 0$. Použijeme odmocninové kritérium:

$$\sqrt[n]{a_n} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n+1}{n+3}}}_{=:b_n} \underbrace{\log \frac{n+3}{n+1}}_{=:c_n}.$$

Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n+3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \log 1 = 0,$$

kde jsme využili faktu, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, aritmetiky limit a spojitosti logaritmu v bodě 1. Dále pro každé n přirozené platí $0 < \frac{n+1}{n+3} < 1$, tedy i

$$0 < \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+3}} < 1,$$

odkud plyne, že posloupnost b_n je omezená². Podle věty, že limita součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule, je nula, tedy máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0,$$

což podle limitního odmocninového kritéria znamená, že zadaná řada konverguje.

Poznámka: Jinou možností bylo nejprve použít (limitního) srovnávacího kritéria, tj. buď si uvědomit, že pro všechna přirozená n platí

$$0 < \frac{n+1}{n+3} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n < \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n,$$

nebo že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{n+3} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n}{\left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n} = 1.$$

Ať již použijeme jeden či druhý argument, vidíme, že konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n$ implikuje konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n$. Konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n$ však dostaneme z odmocninového kritéria, jako výše.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- aplikace odmocninového kritéria 3 body
- $a_n > 0$, aritmetika limit 2 + 2body
- výpočet limity logaritmu 4 bodů
- výpočet limity n -té odmocniny 4 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění výpočtu limity (omezená krát posloupnost s nulovou limitou) 4 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

²Samozřejmě je také možno spočítat limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ například rozpisem obecné mocniny na exponenciálu a logaritmus, a obdržíme také $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$.

Příklad 2 : Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\cotg x}.$$

(15 bodů)

Řešení : Protože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \arccos x = 1$, je na nějakém prstencovém okolí nuly funkce $\frac{2}{\pi} \arccos x$ kladná, a proto je obecná mocnina za znamením limity definována korektně,¹ tedy:

$$A := \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\cotg x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\cotg x \log \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)} = e^B, \quad (5)$$

jak plyne ze spojitosti funkce exp, pokud ovšem existuje vlastní

$$B := \lim_{x \rightarrow 0} \cotg x \log \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right).$$

Máme však

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \cotg x \log \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\cos x}_{=: L_1(x)} \cdot \underbrace{\frac{\log \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)}{\frac{2}{\pi} \arccos x - 1}}_{=: L_2(x)} \cdot \underbrace{\frac{\frac{2}{\pi} \arccos x - 1}{\sin x}}_{=: L_3(x)}.$$

Platí: $\lim_{x \rightarrow 0} L_1(x) = 1$ (spojitost kosinu v nule), a dále $\lim_{x \rightarrow 0} L_2(x) = 1$ (využijeme základní limitu pro logaritmus, $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log(y)}{y-1} = 1$, a faktu, že v limitě složené funkce v $L_2(x)$ je vnitřní funkce, tj. $\frac{2}{\pi} \arccos x$, prostá na okolí bodu 0). Limitu výrazu $L_3(x)$ spočteme například použitím l'Hospitalova pravidla typu „ $\frac{0}{0}$ “:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\pi} \arccos x - 1}{\sin x} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x} = -\frac{2}{\pi},$$

kde „ $\stackrel{\text{l'H}}{=}$ “ značí „pokud existuje limita vpravo“. Celkově, podle věty o aritmetice limit, $B = -\frac{2}{\pi}$, a tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\cotg x} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- použití rozpisu na exp a log 2 body
- výpočet pomocí základní limity logaritmu, včetně odůvodnění (složená fce) .. 5 bodů
- výpočet pomocí l'Hospitala typu „ $\frac{0}{0}$ “, včetně ověření, že jde o tento typ 5 bodů
- dokončení, včetně argumentu o spojitosti exp 3 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- základní limita logaritmu, limita složené funkce 1 + 1 bod
- ověření, že jde o l'Hospitala typu „ $\frac{0}{0}$ “ 1 bod
- spojitost exp 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

¹Také odtud vidíme, že limita, kterou máme spočítat je typu „ $1^{\pm\infty}$ “

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (C) ZS 1997-98

Příklad C1 : Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^4 + 2n^3} - \sqrt{n^4 + 1}} \right)^n \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad C2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{2^n - 2n} \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad C3 : Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)}{\operatorname{tg} x}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad C4 : Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) funkce

$$f(x) = \max\{\min\{\cos x, (1/2)\}, (-1/2)\}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad C5 : Vyšetřete průběh funkce (bez konvexity)

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos 3x}. \quad (20 \text{ bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (C) ZS 1997-98

Příklad C1 : Pokusme se nejprve spočítat limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)^x.$$

Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)^x &= \exp \left(\log \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)^x \right) \right) \\ &= \exp \left(x \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right) \right) \\ &= \exp \left(\frac{\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right) \\ &= \exp \left(\frac{\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3} + \sqrt{x^4 + 1}}{2x^3 - 1} \right) \\ &= \exp \left(\frac{\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}{2 - \frac{1}{x^3}} \right). \quad (*) \end{aligned}$$

Dále platí:

$$(1) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1,$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+2x^3}+\sqrt{x^4+1}}{2x^3-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2x-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{+\infty} = 0,$$

(3) funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}$ je na jistém okolí $+\infty$ různá od nuly,

(4) \exp je spojitá na \mathbb{R} .

Z (1)–(3) a z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}} = 1. \quad (**)$$

Dále máme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2-\frac{1}{x^2}} = 1. \quad (***)$$

Z (*), (**), (***) a (4) plyne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x = e^1 = e$$

a tedy podle Heineho věty

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n = e.$$

Příklad C2 : Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ platí $2^n > 2n$ a proto jsou všechny členy uvažované řady jsou kladné. Můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{3}{2^n - 2n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{2^{n+1}-2(n+1)}}{\frac{3}{2^n-2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{n}{2^{n-1}}}{2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

Příklad C3 : Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 2 \sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - 2 \sin(\pi/6 + x)}{x} \right) \\ &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} - \frac{\sqrt{3} \sin x}{x} \right) \\ &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} - \frac{\sqrt{3} \sin x}{x} \right) \\ &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1 + \cos x} - \frac{\sqrt{3} \sin x}{x} \right). \quad (*) \end{aligned}$$