10. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

1. (a)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k}$$

Řešení: Z identity $\frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$ plyne, že řada je geometrická s kvocientem menším než 1. Řada je tedy konvergentní — dokonce lze určit její součet (=3).

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

Řešení: Jelikož řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tak řada diverguje.

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

Řešení: Použijeme limitní srovnávací kritérium. Jako srovnávací řadu použijeme $b_n := 1/n$ o níž víme, že diverguje. Tedy počítáme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1.$$

Jelikož $1 \in (0, \infty)$, tak naše řada konverguje právě tehdy, když konverguje zvolená b_n. Ta diverguje, čili i zadaná řada diverguje.

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$$

Řešení: Nejprve výraz upravíme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5-n^2-1}{\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{(n^2+5)(n^2+1)} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^{4/3}}.$$

Jelikož jsme řadu omezili jinou a navíc konvergující řadou, tak zadaná řada taktéž konverguje.

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5}$$

Řešení: 1. Označme $b_n = \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5}$. Zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2}\frac{2+3/n+4/n^2}{2+5/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3/n+4/n^2}{2+5/n^2} = \frac{2}{2} = 1$$

Označme $a_n = (-1)^n b_n$. Zřejmě $a_{2n} = b_{2n}$, a tedy $\lim a_{2n} = \lim b_{2n} = 1$. Zřejmě $a_{2n+1} = (-1) \cdot b_{2n+1}$, a tedy $\lim a_{2n+1} = -\lim b_{2n} = -1$. Tudíž $\lim a_n$ neexistuje. Řada diverguje, neboť pro konvergentní řadu je limita posloupnosti koeficientů nulová.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}}$$

Řešení: "Odstraněním odmocniny z čitatele" vhodným rozšířením dostaneme

$$\frac{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}} = \frac{4}{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+5} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}\right)}$$

Jmenovatel se tedy chová zhruba jako $n^{1/4} \cdot n^{4/3} = n^{17/12}$. Přesněji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+5} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}\right)}}{\frac{1}{n^{1/4} \cdot n^{4/3}}} = 4 \neq 0$$

a podle limitního srovnávacího kritéria a předchozího faktu (srovnávali jsme s řadou $\sum \frac{1}{n^{17/12}}$) řada konverguje.

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$$

Řešení: Použijeme limitní srovnávací kritérium a srovnání s řadou $\sum \frac{1}{n}$. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

řada diverguje.

(h)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k - 2^k}{3^k + 2^k}$$

Řešení: Platí, že

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k - 2^k}{3^k + 2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k}{3^k} \cdot \frac{1-(2/3)^k}{1+(2/3)^k} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Řada diverguje, neboť její koeficienty nesplňují nutnou podmínku pro konvergenci: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+1/n)^n}$$

Řešení: Řada konverguje, neboť $\frac{1}{(2+1/n)^n} \leq \frac{1}{2^n}$.

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3}$$

Řešení: Řada konverguje podle srovnávacího kritéria, neboť

$$\frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3} = \frac{n\sqrt{n}}{n^3} \cdot \frac{1+2n^{-1/2}}{2+1/n} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1+2}{2+0} = \frac{3}{2}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

(k)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

Řešení: Řadu odhadneme zdola pro $n \geq 3$:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \geq \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, tedy i zadaná řada diverguje.

(l)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\ln k}$$

Řešení: Použijeme srovnávací kritérium. Pro $k > e^2$ je $k^{-\ln k} = \frac{1}{k^{\ln k}} < \frac{1}{k^2}$. Řada konverguje, neboť konverguje řada $\sum \frac{1}{k^2}$.

Ačkoli ne u každého řešení je to napsáno, používáme hojně Heineho větu a Větu o limitě složené funkce. U obou těchto vět stejně jako u limitního srovnávacího kritéria pečlivě ověřujeme podmínky.

2. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$$

Řešení:

Snadno se ověří, že všechny koeficienty $a_n = n^3\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ jsou nezáporné. Ukážeme, že $a_n \not\to 0$ pro $n \to \infty$. Je totiž

$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2} = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty,$$

kde pro výpočet limity posledního zlomku použijeme Heineho větu, substituci $x = \frac{1}{n}$ a limitu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Řada tedy nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

Řešení: Viz sken

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$$

Řešení: Viz sken

(2)

$$\sum \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}_{a_n \geq 0}$$

LSK s $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

Heine $x_n = \frac{1}{n^2}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ K, tedy z LSK i $\sum a_n$ K

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} n}{n}}_{a_n} \qquad a_n \geq 0$$

srovnáme s $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg} n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}$$

neb Heine $x_n = n$, $x_n \neq \infty$, $x_n \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$\sum \frac{1}{n}$ D, tedy z LSK i $\underline{\underline{\sum a_n}}$ D

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^{-1} \ln \frac{n+1}{n}$$

Řešení:

Položme $a_n = \sin n^{-1} \ln \frac{n+1}{n}$. Ukážeme, že a_n lze porovnat s $\frac{1}{n^2}$ a tudíž řada podle limitní verze srovnávacího kritéria konverguje. Podle Heineho věty a substituce $x = \frac{1}{n}$ totiž máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\frac{n+1}{n})}{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

takže použitím obou limit dohromady dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

(e)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{(k^2+1)^{-1}} - 1\right)$$

Řešení:

Protože

$$\left(k^{(k^2+1)^{-1}} - 1\right) = e^{\frac{\ln k}{k^2+1}} - 1$$

a výraz v exponentu konverguje pro $k \to \infty$ k nule (například podle Heineho věty a l'Hospitalova pravidla), dostáváme s přihlédnutím k Heineho větě, větě o limitě složené funkce a základní limity $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ pro $x \to 0$, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e^{\frac{\ln k}{k^2+1}} - 1}{\frac{\ln k}{k^2+1}} = 1.$$

Podle limitní verze srovnávacího kritéria tedy vyšetřovaná řada konverguje, právě když konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2+1}.$$

Ukážeme, že tato řada konverguje srovnáním s $(\ln k)/k^2$.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\ln k}{k^2+1}}{\frac{\ln k}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2+1} = 1.$$

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ konverguje ("fakt"), tedy konverguje i původní řada z limitního srovnávacího kritéria.

(f)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1} \cos \frac{1}{k}$$

Řešení:

Řada nekonverguje srovnáním s řadou $\sum_k \frac{1}{k}$, neboť limitní srovnávací kritérium dává

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k^2+1} \cos \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2+1} \cos \frac{1}{k} = 1.$$

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}}$$

Řešení: Viz sken

(7)

$$\sum \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}} = \sum a_n \qquad a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(1) $$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

(2) $$\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\,\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{(n^2)^2}}$$

(3) budeme srovnávat s $b_n = \dfrac{n^{-3/2}}{\frac{1}{n^{4/3}}} = n^{-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}} = n^{-\frac{1}{6}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}}^{(*)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}}_{(**)}$$

$$\cdot \left(\sqrt[3]{(n^2+1)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\,\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^4}\right)^{(****)} \cdot \frac{1}{n^{-3/2}} \cdot \frac{1}{n^{4/3}}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} 1 \cdot \frac{1}{1\cdot\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}\right)} \cdot \frac{\sqrt{(1+0)^2} + \sqrt[3]{1+0} + \sqrt[3]{1}}{1} = \frac{3}{2}$$

(*) Heine $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\quad x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1$

(**) $\lim \dfrac{n^{3/2}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \qquad x_n = n, \quad x_n \to \infty$

Heine $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}^{(***)} \overset{\text{VOAL}}{=} \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

VOLSF !

(7)

(***) $f(y) = \sqrt{y}$ $\qquad \lim_{y \to 1} \sqrt{y} = 1$

$g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ $\qquad \lim_{x \to \infty} g(x) = 1 + 0 = 1$

spojitost f v 1

(****) analogicky

Závěr: $\sum n^{-1/6} = \sum \frac{1}{n^{1/6}}$ D

a tedy z LSK i $\underline{\underline{\sum a_n \text{ D}}}$

(h)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arctan \frac{2k}{1+k^2},$$

Řešení: Viz další příklad.

(i)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arctan \frac{2kx}{x^2+k^2},$$

kde $x \in \mathbb{R}$ je parametr.

Řešení:

Pokud $x = 0$, řada má nulové koeficienty a konverguje. Pokud $x \neq 0$, použijeme limitní srovnávací kritérium. Platí, že

$$\lim_{y \to 0} \frac{\arctan y}{y} = 1,$$

odkud vyplývá (substitucí $y = \frac{2kx}{x^2+k^2}$), že

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\arctan \frac{2kx}{x^2+k^2}}{\frac{2kx}{x^2+k^2}} = 1,$$

a proto řada $\sum_k \arctan \frac{2kx}{k^2+x^2}$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_k \frac{2kx}{x^2+k^2}$. Jednoduchým srovnáním ale dostaneme, že od určitého členu počínaje, kdy je $k^2 \geq x^2$, platí

$$\frac{2kx}{x^2+k^2} \geq \frac{2kx}{2k^2} = \frac{x}{k},$$

přičemž řada napravo diverguje pro každé $x \neq 0$.

Závěr. Řada konverguje pro $x = 0$, jinak diverguje.

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2+1}$$

Řešení:

S přihlédnutím k Heineho větě totiž jednoduchým rozšířením dostaneme

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{n}{n^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} \cdot \frac{n^2}{n^2+1} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{n}{n^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Řada tudíž diverguje srovnáním s harmonickou řadou.

(k)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{k^a}-1\right),$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr.

Řešení:

Pokud $a \geq 0$, pak $\lim\left(k^{k^a}-1\right) = +\infty$, řada tedy diverguje, neboť není splněna základní podmínka konvergence $\lim a_k = 0$.

Pokud $a < 0$, pak platí

$$k^{k^a}-1 = e^{k^a \ln k}-1,$$

a tudíž (podle Heineho věty a věty o limitě složené funkce s přihlédnutím k faktu, že $\lim_{x\to+\infty} x^a \ln x = 0$ pro $a < 0$)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^{k^a}-1}{k^a \ln k} = \lim_{k\to\infty}\frac{e^{k^a \ln k}-1}{k^a \ln k} = 1.$$

Stačí tedy podle limitního srovnávacího kritéria vyšetřit řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a \ln k$$

pro $a < 0$. O této řadě víme, že pro $0 > a \geq -1$ je divergentní a pro $a < -1$ řada konverguje.

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right)\sin 2^n$$

Řešení: Viz sken

(m)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\arccos\frac{1}{n}$$

Řešení: Viz sken

(n)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\sqrt{\sin\frac{1}{n}}$$

Řešení: Viz sken

(12)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin\left(2^n\right)}_{a_n}$$

$$|a_n| \leq \operatorname{tg}\frac{\pi}{4^n} \qquad \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4^n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\right)$$

srovnalme $\quad b_n = \frac{\pi}{4^n} \quad (b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4^n}}{\frac{\pi}{4^n}} = 1$$

Heine: $\quad \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{tg} y}{y} = 1$

a známá lim

$$y_n := \frac{\pi}{4^n} \qquad y_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

tedy $\quad \sum \operatorname{tg}\frac{\pi}{4^n}$ konv. z LSK s $\sum \frac{\pi}{4^n}$, která konv. (geom. $\sum$).

a tedy $\quad \sum |a_n|$ konverguje (dokonce absolutně) ze srovn. krit. s řadou $\sum \operatorname{tg}\frac{\pi}{4^n}$.

(13)

$$\sum \underbrace{\frac{1}{n} \arccos \frac{1}{n}}_{a_n \geq 0}$$

LSK s $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \arccos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim \arccos \frac{1}{n} \overset{\bullet}{=} \frac{\pi}{2}$$

Heine $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{y\to 0} \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

spojitost arccos v 0

$\sum \frac{1}{n}$ D, tedy i $\sum a_n$ D

(4)

$$\sum \arcsin\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) \cdot \sqrt{\sin \frac{1}{n}} = \sum \underset{\geq 0}{a_n}$$

$$\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = \frac{n^2+1-n^2+1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

LSK S $\quad b_n = \frac{2}{n} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{2}{n^{3/2}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}}{(1)\ \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} \cdot \frac{n}{2}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{\sin \frac{1}{n}}}{(2)\ \sqrt{\frac{1}{n}}} \overset{\text{VOAL}}{=} 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

(1) Heine $\quad x_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} \quad x_n \to 0,\ x_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1$$

(2) Heine $\quad x_n = \frac{1}{n},\ x_n \to 0,\ x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{\sin y}}{\sqrt{y}} = 1$ $\quad$ neboť $\quad f(z) = \sqrt{z} \quad \lim_{z\to 1} f(z) = 1$

$g(y) = \frac{\sin y}{y}, \quad \lim_{y\to 0} g(y) = 1$

pozn $\quad$ VOLSF $\quad$ spojitost $f(z)$

<u>Závěr:</u> $\quad \sum b_n$ K, tedy i $\underline{\sum a_n}$ K

3. (a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$.
Řešení: Nechť $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (částečný součet první řady) a $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} + a_{2k})$ (částečný součet druhé řady). Potom platí, že $\sigma_n = s_{2n}$, a tedy posloupnost částečných součtů druhé řady tvoří podposloupnost částečných součtů řady první. A protože libovolná podposloupnost konvergentní posloupnosti konverguje (a to ke stejné limitě), je tvrzení pravdivé.

(b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Řešení: Tvrzení není pravdivé. Uvažte posloupnost $a_n = (-1)^n$. Potom první řada $\sum a_n$ má vlastně podobu $-1+1-1+1-1+1$ a osciluje, kdežto druhá $\sum(a_{2n-1} + a_{2n})$ má podobu $0+0+0+0+\ldots$ a je zjevně konvergentní.

(c) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.
Řešení: Tvrzení není pravdivé. Řada $\sum \frac{1}{n}$ není konvergentní.

(d) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq 1$.

(e) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq n_0$.
Řešení: Tvrzení jsou zjevně nepravdivá, co třeba řady se zápornými členy $\sum -\frac{1}{n^2}$. Ale i pokud předpokládáme, že $a_n \geq 0$ pro každé přirozené n, přesto najdeme protipříklad. Uvažte posloupnost

$$a_{2n} = \frac{1}{(2n)^2}, \qquad a_{2n+1} = \frac{2}{(2n)^2}.$$

Potom je celkem zřejmé, že $a_{2n+1} \geq a_{2n}$. Přitom řada $\sum a_n$ je konvergentní, neboť $a_{2n} \leq a_{2n+1} \leq \frac{1}{n^2}$ a řada tedy konverguje podle srovnávacího kritéria.