10. cvičení

http://www.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Heineova)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, je definována na nějakém prstencovém okolí bodu a. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(i)
$$\lim_{x \to a} f(x) = A;$$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, splňující $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}: \; x_n \neq a$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k - 2^k}{3^k + 2^k}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+1/n)^n}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

(l) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\ln k}$

2. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^{-1} \ln\frac{n+1}{n}$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{(k^2+1)^{-1}} - 1\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1} \cos\frac{1}{k}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\frac{2k}{1+k^2},$

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \arctan \frac{2kx}{x^2+k^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2+1}$

(k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{k^a} - 1\right)$, $a \in \mathbb{R}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin 2^n$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arccos \frac{1}{n}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) \sqrt{\sin \frac{1}{n}}$

Bonus

Dokažte, nebo najděte protipříklad.

(a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$.

(b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.

(d) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq 1$.

(e) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq n_0$.

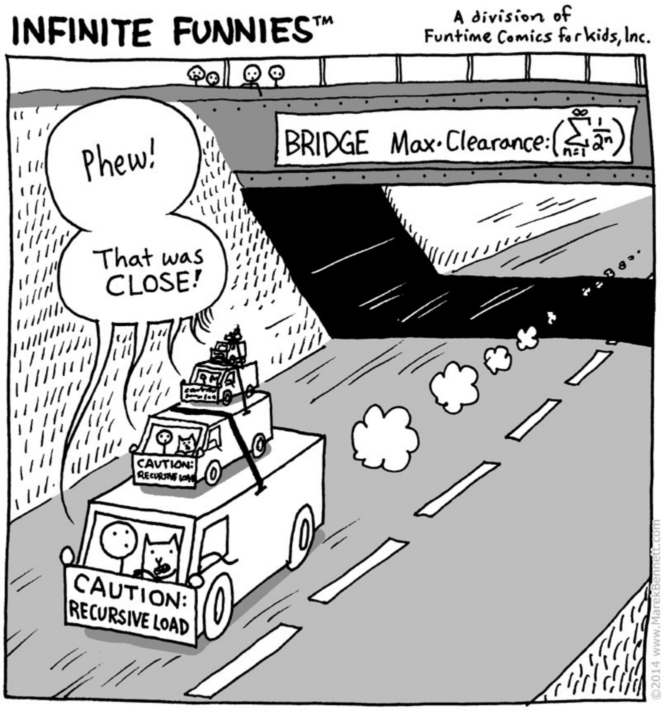

Figure 1: https://marekbennett.com/2014/03/06/recursive-load