

## 9. cvičení

<http://www.mff.cuni.cz/~kuncova/>, [kylaristka@gmail.com](mailto:kylaristka@gmail.com)

### Teorie

**Věta 1.** Necht'  $\{a_n\}$  je reálná posloupnost, jejíž všechny členy jsou **kladné**. Necht' dále platí, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Potom platí, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

### Fakta

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

### Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} & \text{(f)} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2 + (-1)^k}{7} \right)^k & \text{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right)^n \\ \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n} + 3^{2n}} & \text{(g)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k} & \text{(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)} \\ \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[3]{3} - 1) & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} & \text{(l)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} & \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{3n^2 + 2} & \text{(m)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{(n-1)n(n+1)} \\ \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2} & & \end{array}$$

2. Vyšetřete konvergenci následujících řad,  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$$

## Bonus

3. Necht'  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  je konvergentní,  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$  jsou divergentní. Rozhodněte, zda musí platit:

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$  je konvergentní.
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n + d_n$  je divergentní.
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$  je konvergentní.
- (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n + l \cdot b_n$ , kde  $k, l \in \mathbb{R}$ , je konvergentní.
- (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$  je konvergentní.
- (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$  je konvergentní.
- (g)  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot d_n$  je konvergentní.

## Zkouškové příklady

4. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n + 1} z^n, \quad z \in \mathbb{R}.$
- (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$
- (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}$
- (d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(2^{2^n} + 1)}{\ln(2^{4^n} + 1)}$



Figure 1: <https://mathjokes4mathyfolks.wordpress.com/2010/09/09/a-nice-and-funny-note/>