Tedy

$$S_n = -\frac{\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)'}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}.$$

Toto vyjádření již vypadá sympatičtěji, ale stejně se nedostaneme dále, pokud neumíme vypočíst součin $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$. Tento součin pro $x \neq 2^n k\pi$ můžeme vypočíst následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} &= \frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \\ &= \frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}} = \\ &= \frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\sin\frac{x}{2^{n-2}}}{2^2\sin\frac{x}{2^n}} = \cdots = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.\end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$\begin{aligned}S_n &= -\frac{\left(\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\right)'}{\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}} = -\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}}{\sin x}\cdot\frac{\cos x\cdot 2^n\sin\frac{x}{2^n} - \sin x\cdot\cos\frac{x}{2^n}}{\left(2^n\sin\frac{x}{2^n}\right)^2} = \\ &= \frac{\sin x\cos\frac{x}{2^n} - \cos x\cdot 2^n\sin\frac{x}{2^n}}{\sin x\cdot 2^n\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{1}{2^n}\operatorname{cotg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{cotg} x.\end{aligned}$$

Tato formule zřejmě platí pro všechna x, která uvažujeme od samého začátku, tj. pro $x \neq k\pi$, kde k je celé. ▲

1a **Příklad 4.60.** Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

Řešení. Tuto limitu vypočteme podle l'Hospitalova pravidla typu $\frac{0}{0}$. Můžeme čtenáře upozornit, že veškerá snaha vypočíst tuto limitu některou z metod používaných v Kapitole 2 bude marná. Zde je

$$\begin{aligned}f(x) &= \operatorname{tg} x - x, &\quad \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} x - x) = 0,\\ g(x) &= x - \sin x, &\quad \lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0}(\sin x - x) = 0.\end{aligned}$$

Obě funkce zřejmě mají na $\mathscr{U}^*_{\pi/2}(0)$ vlastní derivaci, přičemž $g'(x) = 1 - \cos x \neq 0$ na $\mathscr{U}^*_{\pi/2}(0)$. Dále

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x(1 - \cos x)} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\cos^2 x(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1 + 1}{1^2} = 2.\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2.$$

▲

1b

Příklad 4.64. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$.

Řešení. V první řadě použijeme l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\arcsin 2x - 2\arcsin x)'}{(x^3)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot 2 - 2\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3}\cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}}.$$

Je jistě možné ihned opět použít l'Hospitalovo pravidlo, ale zejména vzhledem ke složitosti jmenovatele to nelze doporučit. Dostáváme však snadno

$$\frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2} \times$$

$$\times \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}.$$

Poslední limita již podle pohledu vypadá sympaticky (mělo by se nám zdát, že jsme podobné limity již počítali), takže pravděpodobně bude možné vypočítat ji elementárními metodami. Zároveň však, představíme-li si derivaci čitatele, vidíme, že i použití l'Hospitalova pravidla vypadá nadějně. Vyzkoušíme proto obě metody. Je

$$\frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}\right)\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2}\right)} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2}}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-x^2-1+4x^2}{x^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2} = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1.$$

Nebo s pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}\right)'}{(x^2)'} =$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}}{2x} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{\sqrt{1-4x^2}}\right) = \frac{1}{3}(-1+4) = 1.$$

Zde jsou oba výpočty přibližně stejně dlouhé. (Taková věc se dá jen stěží předpovědět.) Každopádně nám vyšlo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} = 1.$$

▲

tj. položíme $f(x) = x^{-100}$, $g(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$. Zde ovšem

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^{-100} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Pokusíme se proto použít l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$. Zde vychází

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-100x^{-101}}{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3}} = 50\,\frac{x^{-98}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

a ihned vidíme, že došlo ke zlepšení. Místo x^{-100} máme pouze x^{-98}. l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$ musíme ovšem celkem použít 50-krát. (Snadno je vidět, že příslušné předpoklady jsou při každém použití splněny.)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^{-100}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{l'H}}{=} 50 \lim_{x\to 0} \frac{x^{-98}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} 50 \lim_{x\to 0} \frac{-98x^{-99}}{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3}} = 50 \cdot 49 \lim_{x\to 0} \frac{x^{-96}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} \dots \overset{\text{l'H}}{=} 50 \cdot 49 \cdots 2 \lim_{x\to 0} \frac{x^{-2}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} 50 \cdot 49 \cdots 2 \lim_{x\to 0} \frac{-2x^{-3}}{e^{\frac{1}{x^2}} (-2) \frac{1}{x^3}} = \\
&= 50 \cdot 49 \cdots 2 \cdot 1 \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 50! \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

▲

1j

Příklad 4.74. Určete $\lim\limits_{x\to 1-} \big(\ln x \cdot \ln(1-x)\big)$.

Řešení. Zde opět musíme především limitovanou funkci napsat ve tvaru podílu. Můžeme tedy postupovat např. takto:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-} \big(\ln x \cdot \ln(1-x)\big) &= \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1-} \left(x \ln x \cdot \frac{\ln x}{1-x}\right) = \\
&= -\lim_{x\to 1-} x \ln x \cdot \lim_{x\to 1-} \frac{\ln x}{x-1} = 0 \cdot 1 = 0.
\end{aligned}$$

Zde jsme použili l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$. Lze ovšem postupovat i druhým způsobem:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-} \big(\ln x \cdot \ln(1-x)\big) &= \lim_{x\to 1-} \frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(1-x)}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\ln^2(1-x)} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1)} = \\
&= \lim_{x\to 1-} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 1-} \frac{\ln^2(1-x)}{\frac{1}{1-x}} \overset{\text{l'H}}{=} 1 \cdot \lim_{x\to 1-} \frac{2\ln(1-x) \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1)}{-\frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-1)} =
\end{aligned}$$

1j

$$= -2 \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{1-x}} \overset{\text{l'H}}{=} -2 \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{1-x}\cdot(-1)}{-\frac{1}{(1-x)^2}\cdot(-1)} =$$
$$= 2 \lim_{x\to 1-} (1-x) = 2\cdot 0 = 0.$$

Při tomto druhém postupu jsme použili l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{0}{0}$.

Povšimněte si, že tento příklad bylo možno vypočíst buď s použitím l'Hospitalova pravidla typu $\frac{0}{0}$, nebo s použitím l'Hospitalova pravidla typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$. Délka výpočtu je ovšem v obou případech různá. ▲

Při výpočtu limit funkcí tvaru $h(x)^{k(x)}$ s použitím některého z obou l'Hospitalových pravidel postupujeme na začátku zcela stejně jako při výpočtu elementární metodou. Napíšeme

$$h(x)^{k(x)} = \mathrm{e}^{k(x)\ln h(x)}$$

a potom počítáme $\lim_{x\to a}\big(k(x)\ln h(x)\big)$. Při výpočtu této limity přirozeně smíme použít l'Hospitalova pravidla. Vyjde-li $\lim_{x\to a}\big(k(x)\ln h(x)\big) = A$, potom

1e

$$\lim_{x\to a} h(x)^{k(x)} = \mathrm{e}^{A}.$$

Příklad 4.75. Určete $\lim_{x\to 0+} x^x$.

Řešení. Je $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$. Dále $\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$ podle Příkladu 4.71. Tedy

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \mathrm{e}^0 = 1.$$

▲

Příklad 4.76. Určete $\lim_{x\to 0+} x^{x^x-1}$.

Řešení. Je $x^{x^x-1} = \mathrm{e}^{(x^x-1)\ln x}$. Zbývá tedy vypočíst $\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\ln x$. Budeme asi v pokušení použít l'Hospitalovo pravidlo. Podotkněme však, že nikdy nic nezkazíme, napíšeme-li místo $h(x)^{k(x)}$ výše zmíněný výraz $\mathrm{e}^{k(x)\ln h(x)}$. Obvykle se tím situace spíše vyjasní než zkomplikuje. Vyjde

$$\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\ln x = \lim_{x\to 0+}(\mathrm{e}^{x\ln x}-1)\ln x =$$
$$= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}x\ln^2 x\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot \lim_{x\to 0+} x\ln^2 x =$$
$$= 1\cdot \lim_{x\to 0+}\left(x^{\frac{1}{2}}\ln x\right)^2 = \left[\lim_{x\to 0+}\left(x^{\frac{1}{2}}\ln x\right)\right]^2 = 0^2 = 0.$$

Připomeňme, že k výpočtu $\lim_{x\to 0+}\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}$ jsme použili větu o limitě složené funkce s tím, že víme, že $\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$. (Viz Příklad 4.71. Zde je právě skryto použití l'Hospitalova pravidla.) Dále pak $\lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{2}}\ln x = 0$ opět podle Příkladu 4.71. Vychází tedy

$$\lim_{x\to 0+} x^{x^x-1} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

▲

Zde jsme použili výsledků Příkladů 2.54, 2.57, 2.117 a 2.118. (Takové jednoduché limity stojí za to si zapamatovat. Jak vidno, může nám to dosti pomoci při výpočtech.) ▲

Příklad 4.70. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{argsinh}(\sinh x) - \operatorname{argsinh}(\sin x)}{\sinh x - \sin x}$.

Řešení. Zde je dobré si povšimnout, že $\operatorname{argsinh}(\sinh x) = x$, neboť se nám tím zjednoduší počítání při použití l'Hospitalova pravidla. Samozřejmě, kdybychom derivovali $\operatorname{argsinh}(\sinh x)$ jakožto složenou funkci, musí nám opět vyjít 1:

$$\left(\operatorname{argsinh}(\sinh x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} \cdot \cosh x = \frac{1}{\cosh x} \cdot \cosh x = 1.$$

Je to ovšem počítání zcela zbytečné. Dostaneme

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{argsinh}(\sinh x) - \operatorname{argsinh}(\sin x)}{\sinh x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{argsinh}(\sin x)}{\sinh x - \sin x} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x+1}} \cdot \cos x}{\cosh x - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sin^2 x + 1} - \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 1}\,(\cosh x - \cos x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + 1}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sin^2 x + 1} - \cos x}{\cosh x - \cos x} = \\
&= 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + 1 - \cos^2 x}{\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + \cos x\right)(\cosh x - \cos x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + 1} + \cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{\cosh x - \cos x} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{(\cosh x - 1) + (1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\frac{\cosh x - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2}} = \\
&= \frac{\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} + \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.
\end{aligned}$$

Použili jsme opět výsledků Příkladů 2.54 a 2.117. ▲

Příklad 4.71. Určete $\lim\limits_{x\to 0+} x^\varepsilon \ln x$, $\varepsilon > 0$. Pomocný př.

Řešení. V tomto příkladě je nutné nejprve limitovanou funkci upravit tak, aby měla tvar podílu. Máme dvě možnosti:

$$\frac{x^\varepsilon}{\frac{1}{\ln x}}, \quad \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\varepsilon}}.$$

Spočítáme-li v prvním případě podíl derivací, dostáváme

$$\frac{(x^\varepsilon)'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \frac{\varepsilon x^{\varepsilon - 1}}{-\left(\frac{1}{\ln x}\right)^2 \cdot \frac{1}{x}}.$$

Vidíme, že méně příjemný výraz $\ln x$ nám i po zderivování zůstává. Bude proto asi lepší použít druhou možnost (v podobných situacích je důležité umět si vybrat!). Položíme tedy

$$f(x) = \ln x, \qquad g(x) = \frac{1}{x^\varepsilon}$$

Pomocný př.

a vidíme ihned, že

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^{\varepsilon}} = +\infty.$$

Nelze tedy zjevně použít l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{0}{0}$, ale patrně bude možné použít l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$. Funkce $f(x)$, $g(x)$ mají dokonce na libovolném $\mathscr{U}_{\delta}^{*+}(0)$ vlastní derivace, přičemž $g'(x) = -\varepsilon\frac{1}{x^{\varepsilon+1}} \neq 0$ na $\mathscr{U}_{\delta}^{*+}(0)$. Zbývá pouze zjistit, zda existuje $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon\frac{1}{x^{\varepsilon+1}}} = -\frac{1}{\varepsilon} \lim_{x\to 0+} x^{\varepsilon} = 0.$$

Tedy podle l'Hospitalova pravidla typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$ existuje též $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to 0+} x^{\varepsilon} \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

▲

Příklad 4.72. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^{ax}}$, $a > 0, n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Je to velice jednoduchý příklad na použití l'Hospitalova pravidla typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$. Jenže pravidlo je třeba použít n-krát. Při každém použití je třeba ověřit, zda jsou splněny předpoklady l'Hospitalova pravidla typu $\frac{\text{něco}}{\infty}$, ale to je zde naštěstí zcela zřejmé.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} &\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{ae^{ax}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^2e^{ax}} \overset{\text{l'H}}{=} \\ &\overset{\text{l'H}}{=} \dots \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot x}{a^{n-1}e^{ax}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^n e^{ax}} = \\ &= \frac{n!}{a^n} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{ax}} = \frac{n!}{a^n} \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

▲

Příklad 4.73. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

Řešení. Zde se jedná o poněkud záludný příklad. Položme $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $g(x) = x^{100}$. Snadno vidíme, že

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^{100} = 0,$$

takže se rozhodneme použít l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{0}{0}$. Počítáme-li však podíl derivací, dostáváme

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 2\frac{1}{x^3}}{100\cdot x^{99}} = \frac{1}{50} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{102}}.$$

Situace se nám po zderivování ještě zhoršila! Místo x^{100} máme nyní ve jmenovateli x^{102}. Tento postup tedy nevypadá vůbec perspektivně. Naštěstí ale máme ještě jinou možnost. Napíšeme

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \frac{x^{-100}}{e^{\frac{1}{x^2}}},$$

(1d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{2x\sin x + x^2\cos x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2\sin x + 2x\cos x + 2x\cos x + (-\sin x)x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2\sin x + 2x\cos x + 2x\cos x - \sin x \cdot x^2}$

1

$\overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim \dfrac{1}{2\cos x + 2(2\cos x - 2x\sin x) - \cos x \cdot x^2 - 2x\sin x}$

$= \dfrac{1}{2+2(2-0)-0-0} = \underline{\underline{1/6}}$

1. cvičení

http://www.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (l'Hospitalovo pravidlo). Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou reálné funkce a existuje $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Jestliže navíc platí

(a) $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$, nebo

(b) $\lim_{x \to a+} |g(x)| = \infty$,

potom

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Příklady

1. Spočtěte limity. Nezapomeňte na Heineho a na fakt, že ne vždy L'Hospital pomůže.

(a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$$

(b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$$

(c)

$$\lim_{x \to 0+} x^x$$

(d)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2}$$

1e (e)

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n \frac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2}$$

Řešení:
Budeme uvažovat limitu funkce:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln^2(x+1)}{(x-1)^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2\ln(x+1)}{x+1}}{2(x-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)(x-1)} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{2x} = 0.$$

Z Heineho nyní máme, že

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2} = 0.$$

(1f)

$$\lim_{x\to 1} \arcsin \frac{x^{60}+3x-4}{x^{40}-2x+1} \quad \nexists$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{60}+3x-4}{x^{40}-2x+1} \overset{l'H}{\underset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{60x^{59}+3}{40x^{39}-2} = \underline{\underline{\frac{63}{38}}}$$

nemá def. lim arcsin

(1g)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}-\arccos x}{x} \overset{l'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = \underline{\underline{1}}$$

(1i) zkusme l'H ...

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \overset{l'H}{\underset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=}} \lim \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x} = \dots$$

raději "ručně"

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \underline{\underline{1}}$$

(1m)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}$$

$$\overset{l'H}{\underset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} = \lim \frac{\frac{1-1-x}{1+x}}{\frac{x\ln(1+x)+\ln(1+x)+x}{1+x}} \dots$$

jinak $\overset{VOAL}{=} \lim \frac{x}{\ln(1+x)} \cdot \lim \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

(1m)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} \overset{l'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{1+x}} = \underline{1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \overset{l'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} =$$

$$= \lim \frac{\cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{x}}{2\cancel{x}(1+x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2}$$

celkem $\quad = -\frac{1}{2}$

Na rozdíl od předchozího poměrně dlouhého (i když elementárního) postupu, vede použití l'Hospitalova pravidla typu $\frac{0}{0}$ velmi rychle k cíli:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{tg} 4x - 12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x - 12\sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(3\operatorname{tg} 4x - 12\operatorname{tg} x)'}{(3\sin 4x - 12\sin x)'} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3\cdot \frac{1}{\cos^2 4x}\cdot 4 - 12\cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{3\cdot\cos 4x\cdot 4 - 12\cos x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 4x}{\cos^2 4x\cos^2 x(\cos 4x - \cos x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 4x\cos^2 x}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - \cos 4x)(\cos x + \cos 4x)}{\cos 4x - \cos x} = \\
&= -\lim_{x\to 0}(\cos x + \cos 4x) = -2.
\end{aligned}
$$

Je ovšem třeba se také podívat, zda jsou splněny předpoklady l'Hospitalova pravidla. Zde je

$$f(x) = 3\operatorname{tg} 4x - 12\operatorname{tg} x, \qquad g(x) = 3\sin 4x - 12\sin x.$$

Vše je snad jasné, jen se podíváme, zda na nějakém redukovaném okolí bodu 0 je $g'(x) \neq 0$. Máme

$$g'(x) = 12\cos 4x - 12\cos x = -24\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}.$$

Odtud ihned vidíme, že $g'(x) \neq 0$ např. na $\mathscr{U}^*_{\pi/5}(0)$. ▲

14

Příklad 4.62. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{cotg} x - 1}{x^2}$.

Řešení. Opětně použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Předpoklady jsou očividně splněny, přirozeně až na předpoklad existence limity podílu derivací, kterou budeme nyní počítat. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{cotg} x - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x\operatorname{cotg} x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cotg} x - \frac{x}{\sin^2 x}}{2x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{x}{\sin^2 x}}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\cos x - x}{x\sin^2 x}.
\end{aligned}
$$

K výpočtu poslední limity opět můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo. Než ho ale použijeme, povšimněme si, že $(x\sin^2 x)' = \sin^2 x + 2x\sin x\cos x = \sin x(\sin x + 2x\cos x) \neq 0$ na $\mathscr{U}^*_{\pi/2}(0)$. Zřejmě $\sin x \neq 0$ na $\mathscr{U}^*_{\pi/2}(0)$. Dále $\sin x + 2x\cos x < 0$ na $\mathscr{U}^{*-}_{\pi/2}(0)$ a $\sin x + 2x\cos x > 0$ na $\mathscr{U}^{*+}_{\pi/2}(0)$. Pak

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\cos x - x}{x\sin^2 x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x}.$$

Na poslední limitu je možno opět aplikovat l'Hospitalovo pravidlo, vzniká však otázka (už jsme ho aplikovali stejně dvakrát), zda je to účelné. Trochu vnímavý počtář by měl poznat, že poslední limitu lze vypočíst poměrně jednoduše bez použití l'Hospitalova pravidla. Je

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\cdot 2}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + 2\frac{\sin x}{x}\cos x} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot 2}{1^2 + 2\cdot 1\cdot 1} = -\frac{1}{3}.$$

14

Dvojí použití l'Hospitalova pravidla však není nutné, počítáme-li na začátku trochu šikovněji:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{cotg}x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}.$$

Nyní použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Bereme zde $f(x)=x\cos x-\sin x$, $g(x)=x^2\sin x$. Snadno vidíme, že $g'(x)=2x\sin x+x^2\cos x=x(2\sin x+x\cos x)\neq 0$ na $\mathcal{U}^*_{\pi/2}(0)$. Na $\mathcal{U}^{*-}_{\pi/2}(0)$ je totiž $2\sin x+x\cos x<0$ a na $\mathcal{U}^{*+}_{\pi/2}(0)$ je $2\sin x+x\cos x>0$. Vyjde

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x^2\sin x)'}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\\&=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{2\frac{\sin x}{x}+\cos x}=\\&=-\frac{1}{2\cdot 1+1}=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Zde vidíme, že je dobré uvážlivě používat l'Hospitalovo pravidlo. Bezmyšlenkovité používání tohoto pravidla může často výpočet spíše zkomplikovat než zjednodušit. ▲

Příklad 4.63. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

Řešení. Položíme $f(x)=x(e^x+1)-2(e^x-1)$, $g(x)=x^3$. Ihned vidíme, že

$$\lim_{x\to 0}\big(x(e^x+1)-2(e^x-1)\big)=0,\qquad \lim_{x\to 0}x^3=0$$

a snadno je vidět, že i ostatní předpoklady l'Hospitalova pravidla (kromě existence limity podílu derivací) jsou splněny. Dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\big(x(e^x+1)-2(e^x-1)\big)'}{(x^3)'}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1+xe^x-2e^x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1+xe^x-e^x}{x^2}.\end{aligned}$$

Na výpočet poslední limity opět použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Tentokrát je $f(x)=1+xe^x-e^x$, $g(x)=x^2$. Je

$$\lim_{x\to 0}(1+xe^x-e^x)=0,\qquad \lim_{x\to 0}x^2=0$$

a i ostatní předpoklady jsou splněny — kromě existence limity podílu derivací, ale tu budeme ihned počítat. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+xe^x-e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-e^x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}e^x=\frac{1}{2}.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

V tomto příkladě jsme museli l'Hospitalovo pravidlo použít dvakrát. Vícenásobné použití l'Hospitalova pravidla je poměrně častým jevem. ▲

Nyní ze dvou policajtů nebo z věty o omezené a mizející máme i, že

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2}=0.$$

(f)

$$\lim_{x\to 1}\arcsin\frac{x^{60}+3x-4}{x^{40}-2x+1}$$

(g)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}-\arccos x}{x}$$

(h)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{cotg} x-1}{x^2}$$

(i)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

(j)

$$\lim_{x\to 1-}\ln x\cdot\ln(1-x)$$

12

(k) Použijte l'Hospitala pro $1/n = x \to 0+$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}$$

Řešení: Budeme prve počítat limitu funkce, pomocí L'Hospitalova pravidla typu "0/0".

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1+1}{1^2}=2.$$

Nyní použijeme Heineho, $x_n=\frac{1}{n}$, x_n je v definičním oboru funkce

$$\frac{\tan x-x}{x-\sin x},$$

$x_n\ \emptyset$, $\lim\frac{1}{n}=0$.
Odtud

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}=2.$$

1l (l) Schovejte si kosinus a pak použijte k-krát l'Hospitala

$$\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi)\frac{n^k}{e^{an}},$$

$k \in \mathbb{N}$, $a > 0$.

Řešení: Neboť $\cos(n\pi) = (-1)^n$, musíme limitu nejprve roztrhnout. Budeme počítat jen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^{an}}.$$

Převedeme na funkci. Pak použijeme l'Hospitala typu "něco/∞". Použijeme jej k-krát. Opakovaně nutno ověřit podmínky l'Hospitala (vychází pořád stejně).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^{ax}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{kx^{k-1}}{ae^{ax}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{a^2e^{ax}} = \dots \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k(k-1)\cdots 2x}{a^{k-1}e^{ax}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{k!}{a^k e^{ax}} = \frac{k!}{a^k}\cdot 0 = 0.$$

Z Heineho pak i limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^{an}} = 0.$$

Po přidání kosinu získáme ze dvou policajtů výsledek

$$\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi)\frac{n^k}{e^{an}} = 0.$$

(m)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$$

(n)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\arctan\sqrt{\frac{x}{b}}\right),$$

$a, b > 0$

2. Rozhodněte, zda je funkce $f(x) = \frac{x\cos 2x \sin 3x}{x^2-\pi^2}$, $f(\pi) = -\frac{1}{2}$, spojitá.

3. Najděte asymptoty funkce $\ln(x^2 + e^{x+2})$

1n

Příklad 4.65. Určete $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$, $a > 0, b > 0$.

Řešení. Použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Neměl by nás splést trochu neobvyklý způsob zápisu. Výraz $x\sqrt{x}$ samozřejmě napíšeme ve tvaru $x^{3/2}$, protože tento je vhodnější pro derivování. Vyjde

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^{3/2}}\left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right) = \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{1}{(x^{3/2})'}\left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)' = \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\frac{3}{2}x^{1/2}}\left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}\cdot\frac{1}{a} - \sqrt{b}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{b}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}}\cdot\frac{1}{b}\right) = \\
&= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\frac{x}{b}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \\
&= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{x}{b}-1-\frac{x}{a}}{(1+\frac{x}{a})(1+\frac{x}{b})} = \\
&= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{(1+\frac{x}{a})(1+\frac{x}{b})} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) = \frac{a-b}{3ab}.
\end{aligned}
$$

L'Hospitalovo pravidlo zde bylo použito pouze jednou. ▲

Nyní pro jednoduchost zavedeme následující označení: Značka l'H nad znamením rovnosti bude znamenat, že se používá l'Hospitalova pravidla.

Příklad 4.66. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$, $a > 0$.

Řešení. Vyjde

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \overset{\mathrm{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a - a^{\sin x}\ln a\cdot\cos x}{3x^2} = \\
&= \frac{\ln a}{3}\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}\cos x}{x^2} \overset{\mathrm{l'H}}{=} \\
&\overset{\mathrm{l'H}}{=} \frac{\ln a}{3}\lim_{x\to 0} \frac{a^x\ln a - a^{\sin x}\ln a\cdot\cos^2 x + a^{\sin x}\sin x}{2x} = \\
&= \frac{\ln^2 a}{6}\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}\cos^2 x}{x} + \frac{\ln a}{6}\lim_{x\to 0} a^{\sin x}\frac{\sin x}{x} = \\
&= \frac{\ln a}{6} + \frac{\ln^2 a}{6}\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}\cos^2 x}{x} \overset{\mathrm{l'H}}{=} \\
&\overset{\mathrm{l'H}}{=} \frac{\ln a}{6} + \frac{\ln^2 a}{6}\lim_{x\to 0} \frac{a^x\ln a - a^{\sin x}\ln a\cdot\cos^3 x + a^{\sin x}2\cos x\sin x}{1} = \\
&= \frac{\ln a}{6} + \frac{\ln^2 a}{6}(\ln a - \ln a + 0) = \frac{\ln a}{6}.
\end{aligned}
$$

Jsou ovšem možné alespoň dvě modifikace uvedeného postupu. Např. poslední použití l'Hospitalova

(2)

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x\cos 2x \sin 3x}{x^2-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{x\cos 2x}{x+\pi} \cdot \lim \frac{\sin 3x}{x-\pi}$$

$$\downarrow \qquad \frac{\pi \cdot 1}{2\pi}$$

$$\overset{l'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\pi} \frac{\cos 3x \cdot 3}{1} = -3 \quad \to \text{není spoj v } \pi$$

celkem $\lim = -\frac{3}{2}$

~~(3)~~ $\ln(x^2+e^{x+2})$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+e^{x+2})}{x} \overset{l'H}{\underset{\text{něco}/\infty}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2+e^{x+2}}\cdot(2x+e^{x+2})}{1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+e^{x+2}}{x^2+e^{x+2}} \overset{l'H}{\underset{\text{něco}/\infty}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2+e^{x+2}}{2x+e^{x+2}} \overset{l'H}{\underset{\text{něco}/\infty}{=}} \lim \frac{e^{x+2}}{2+e^{x+2}} = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x^2+e^{x+2}) - x = \lim \ln\left(e^{x+2}\left(\frac{x^2}{e^{x+2}}+1\right)\right) - x$$

$$= \lim x+2-x+\ln\underbrace{\left(1+\frac{x^2}{e^{x+2}}\right)}_{\text{VOLS}} = 2+0 \qquad \underline{\underline{y = x+2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+e^{x+2}}{x^2+e^{x+2}} \overset{l'H}{=} \lim \frac{2+e^{x+2}}{2x+e^{x+2}} - 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(x^2+e^{x+2}) = \infty \qquad \text{asympt. v } -\infty \not\exists$$

Příklad 4.77. Určete $\lim\limits_{x\to 0+} \left(x^{x^x} - 1\right)$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to 0+} \left(x^{x^x} - 1\right) = \lim_{x\to 0+} \left(\mathrm{e}^{x^x \ln x} - 1\right),$$
$$\lim_{x\to 0+} x^x \ln x = \lim_{x\to 0+} x^x \cdot \lim_{x\to 0+} \ln x = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

s použitím Příkladu 4.75. Tedy

$$\lim_{x\to 0+} \left(\mathrm{e}^{x^x \ln x} - 1\right) = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{x^x \ln x} - 1 = 0 - 1 = -1.$$

▲

3a

Příklad 4.78. Určete $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} (\sin x \cdot \ln \operatorname{cotg} x) &= \lim_{x\to 0+} \sin x \cdot (\ln \cos x - \ln \sin x) = \\
&= \lim_{x\to 0+} (\sin x \cdot \ln \cos x) - \lim_{x\to 0+} (\sin x \cdot \ln \sin x) = \\
&= \sin 0 \cdot \ln \cos 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

K výpočtu poslední limity jsme použili Příklad 4.71 (s $\varepsilon = 1$) a větu o limitě složené funkce. Vychází nám

3b

$$\lim_{x\to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

▲

Příklad 4.79. Určete $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^x$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \left[x \ln\left(\ln \frac{1}{x}\right)\right] &= \lim_{x\to 0+} \frac{\ln\left(\ln \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\ln \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\ln \frac{1}{x}} \cdot x = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\ln \frac{1}{x}} \cdot \lim_{x\to 0+} x = 0 \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^0 = 1.$$

3b

▲

Příklad 4.80. Určete $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Řešení. Je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1}\right) &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1}}{x} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{2x+1}} \cdot \frac{\pi(2x+1) - 2\pi x}{(2x+1)^2}\right) = \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{\pi}{(2x+1)^2 \sin \frac{\pi x}{2x+1} \cos \frac{\pi x}{2x+1}} = 2\pi \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{(2x+1)^2 \sin \frac{2\pi x}{2x+1}} =
\end{aligned}$$

3b

$$= -2\pi \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{2x+1} - \pi\right)} =$$

$$= -2\pi \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{2\pi x}{2x+1} - \pi}{\sin\left(\frac{2\pi x}{2x+1} - \pi\right)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2\pi x}{2x+1} - \pi\right)(2x+1)^2} \right) =$$

$$= -2\pi \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2\pi x}{2x+1} - \pi}{\sin\left(\frac{2\pi x}{2x+1} - \pi\right)} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{2\pi x - 2\pi x - \pi}{2x+1}\right)(2x+1)^2} =$$

$$= -2\pi \cdot 1 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-\pi(2x+1)} = -2\pi \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

▲

Příklad 4.81. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, $a > 0, b > 0$.

Řešení. Je

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln\left[1 + \left(\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b} - 1\right)\right]}{\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b} - 1} \cdot \left(\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b} - 1\right) \cdot \frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b} - 1\right) \cdot \frac{1}{x^2} \right] = \lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x - x\ln a - b^x + x\ln b}{b^x - x\ln b} \cdot \frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{b^x - x\ln b} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x - x(\ln a - \ln b)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x - x(\ln a - \ln b)}{x^2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b - \ln a + \ln b}{2x} =$$

$$= \frac{\ln a}{2} \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} - \frac{\ln b}{2} \lim_{x\to 0} \frac{b^x - 1}{x} =$$

$$= \frac{\ln a}{2} \cdot \ln a - \frac{\ln b}{2} \cdot \ln b = \frac{1}{2} (\ln^2 a - \ln^2 b).$$

Zde jsme použili výsledku Příkladu 2.87. L'Hospitalovo pravidlo jsme mohli použít již na samém začátku výpočtu. Derivování by ovšem bylo daleko složitější. (Čtenář si to konečně může sám vyzkoušet.) Obecně lze říci, že se většinou vyplatí používat l'Hospitalovo pravidlo až tam, kde je to nezbytně nutné. Nakonec nám vychází

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b)}.$$

▲

Příklad 4.82. Určete $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.

Řešení. Zde se pouze nesmíme zaleknout tvaru limitované funkce. Převedením na společného jmenovatele z ní uděláme potřebný podíl.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}.$$

Nyní je již možné aplikovat l'Hospitalovo pravidlo typu $\frac{0}{0}$. Následujícím obratem si však limitu můžeme ještě zjednodušit. Vyjde

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$
▲

3c

Příklad 4.83. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x-\frac{1}{x}\right)$.

Řešení. Zde je pouze nutné napsat $\operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$. Jinak postupujeme stejně jako v předchozím příkladě:

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\overset{\text{l'H}}{=}$$
$$\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\sin x=-\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$
▲

Příklad 4.84. Určete $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right)$.

Řešení. Tento příklad zařazujeme hlavně proto, že vypadá velmi složitě. Obecně ale není pravda, že nejsložitěji vypadající příklady nám dají nejvíce práce. Lze ovšem očekávat, že jejich výpočet bude delší. Čtenář nechť si všímá, jakými obraty si postupně budeme zjednodušovat situaci.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x\right)+\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right)\right]=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right).$$

První limitu můžeme vypočíst zcela elementárním způsobem.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-x\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+x+1-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}\right)x+x^2}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+1}=\frac{1}{3}.$$

což ovšem nevypadá příliš perspektivně. Lepší bude limitovanou funkci nejprve upravit.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}}{x} = \\
&= \mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)}-1}{x} = \\
&= \mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)}-1}{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x} = \\
&= \mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} \mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \frac{\mathrm{e}}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-1-x}{x(1+x)} = \\
&= -\frac{\mathrm{e}}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = -\frac{\mathrm{e}}{2}.
\end{aligned}
$$

▲

Příklad 4.87. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$, $a>0$.

Řešení. Je

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}-\mathrm{e}^{x\ln a}}{x^2} \overset{\text{l'H}}{=} \\
&\overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right)-\mathrm{e}^{x\ln a}\cdot\ln a}{2x} = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\cdot\frac{x}{a+x}+\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\ln(a+x)-\mathrm{e}^{x\ln a}\ln a}{x} = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\cdot\frac{1}{a+x}\right]+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\ln(a+x)-\mathrm{e}^{x\ln a}\ln a}{x} = \\
&= \frac{1}{2a}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\Big(\big(\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\ln(a+x)-\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\ln a\big)+\big(\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\ln a-\mathrm{e}^{x\ln a}\ln a\big)\Big)\right] = \\
&= \frac{1}{2a}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}+\frac{1}{2}\ln a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}-\mathrm{e}^{x\ln a}}{x} = \\
&= \frac{1}{2a}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{x}+\frac{\ln a}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{x\ln a}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x(\ln(a+x)-\ln a)}-1}{x} = \\
&= \frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{x}{a})}{\frac{x}{a}}+\frac{\ln a}{2}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x(\ln(a+x)-\ln a)}-1}{x(\ln(a+x)-\ln a)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x(\ln(a+x)-\ln a)}{x} = \\
&= \frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}\cdot 1+\frac{\ln a}{2}\cdot 1\cdot 0 = \frac{1}{a}.
\end{aligned}
$$

3d

▲

Příklad 4.88. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Řešení. Nejprve upravíme limitovanou funkci. Je

$$
\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)}.
$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\Big)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{\text{l'H}}{=}$$

$$\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-1-x}{x(1+x)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{2}.$$

Odtud

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\Big)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

▲

V dalším ukážeme, jak lze k výpočtu limit použít Peanovy věty.

Příklad 4.89. Určete $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Řešení. Podle Peanovy věty můžeme psát

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_5'(x),\qquad \text{kde }\lim_{x\to 0}\frac{R_5'(x)}{x^4}=0,$$

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+R_3''(x),\qquad \text{kde }\lim_{x\to 0}\frac{R_3''(x)}{x^2}=0.$$

Napíšeme-li v poslední rovnosti $-\frac{x^2}{2}$ místo x, dostáváme

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+R_3''\Big(-\frac{x^2}{2}\Big).$$

Dále pak

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_3''\big(-\frac{x^2}{2}\big)}{x^4}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{R_3''\big(-\frac{x^2}{2}\big)}{\big(-\frac{x^2}{2}\big)^2}=\frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{R_3''(y)}{y^2}=0$$

s použitím věty o limitě složené funkce. Nyní máme již vše připraveno k výpočtu dané limity. Vyjde

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_5'(x)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-R_3''\big(-\frac{x^2}{2}\big)}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4!}-\frac{x^4}{8}}{x^4}+\lim_{x\to 0}\frac{R_5'(x)}{x^4}-\lim_{x\to 0}\frac{R_3''\big(-\frac{x^2}{2}\big)}{x^4}=$$

$$=\Big(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\Big)+0-0=-\frac{1}{12}.$$

Přitom jsme použili výše odvozené vlastnosti zbytků. Upozorňujeme, že čárky u písmen R zde ani v dalším neznačí derivaci. ▲

(d)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$$

(3e) (e)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n},$$

$c > 1$.

Řešení: Převedeme na funkci:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{c^x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x\ln c)}}{x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{c^x\ln c}{1}=\infty$$

Z Heineho plyne, že i původní limita

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n}=\infty.$$

(3f) (f)

$$\lim_{n\to\infty}(\ln n)^{\frac{1}{n}}$$

Řešení:

Budeme počítat limitu funkce:

$$\lim_{x\to 0+} e^{(x\ln(\ln\frac{1}{x}))}$$

Tedy musíme spočíst

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(\ln\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\ln\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\frac{1}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}x\overset{VOAL}{=}0\cdot 0$$

Nyní použijeme Heineho, verze zprava: $x_n=\frac{1}{n}$, $x_n\geq 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, definiční obor je také ok. Tedy

$$\lim_{n\to\infty}(\ln n)^{\frac{1}{n}}=e^0=1.$$

(g)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\frac{3}{n}}{\cos\frac{5}{n}}\right)^{n^2}$$

Řešení:

Budeme řešit limitu funkce

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cos\frac{3}{x}}{\cos\frac{5}{x}}\right)^{x^2}$$

4a

$$\lim_{n\to\infty} n^8 \left(2\cos\frac{1}{n^2} - 2 + \frac{1}{n^4}\right)$$

Heine $x_n = \frac{1}{n^2} \to 0$ $\quad \frac{1}{n^2} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\left(2\cos x - 2 + x^2\right) \overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 2x}{4x^3} \overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 2}{12x^2}$$

(zuerst einmal lim)

$$= \lim \frac{2\cdot}{12} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

46

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{e^x-\sin x} - \sqrt{1+\frac{1}{2}x^2}}{\arcsin x - \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-\sin x - (1+\frac{1}{2}x^2)}{\arcsin x - \sin x} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{e^x-\sin x} + \sqrt{1+\frac{1}{2}x^2}}}_{\frac{1}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}} \to \frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\sin x - 1 - \frac{1}{2}x^2}{\arcsin x - \sin x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \cos x}$$

$$\underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{-\frac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x) + \sin x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos x}{\frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{5/2}} + \cos x}$$

$$\overset{VOAL}{=} \frac{1+1}{\frac{2\cdot 0+1}{(1-0)^{5/2}} + 1} = \underline{\underline{1}}$$

VOLSF: $\lim_{x\to 0} (1-x^2)^{5/2} = 1$

$f(y) = y^{5/2}$ $\qquad \lim_{y\to 1} y^{5/2} = 1$ $\qquad$ (S) $y^{5/2}$ spoj v 1

$g(x) = 1-x^2$ $\qquad \lim_{x\to 0} 1-x^2 = 1$

VOLSF $\quad f(y) = \sqrt{y}$

$g_1(x) = e^x - \sin x$ $\qquad \lim_{x\to 0} e^x - \sin x \overset{VOAL}{=} 1-0$ $\qquad \lim_{y\to 1} \sqrt{y} = 1$

$g_2(x) = 1+\frac{1}{2}x^2$ $\qquad \lim_{x\to 0} 1+\frac{x^2}{2} \overset{VOAL}{=} 1+0$ $\qquad$ (S) $\sqrt{y}$ spoj v 1

4C

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\frac{3}{n}}{\cos\frac{5}{n}}\right)^{n^2} = e^8$$

Heine $x_n = 1/n \to 0$ $\quad \frac{1}{n} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos 3x}{\cos 5x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\cdot \ln\left(\frac{\cos 3x}{\cos 5x}\right)} = e^8$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\cos 3x}{\cos 5x}\right)}{x^2} \overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos 5x}{\cos 3x}\cdot\frac{-3\sin 3x\cos 5x + 5\sin 5x\cos 3x}{\cos^2 5x}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underset{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\ \underset{\downarrow\ \frac{1}{1\cdot 1}}{\frac{1}{\cos 3x\cdot\cos 5x}}\cdot\left(\underbrace{\frac{-3\sin 3x\cos 5x}{3x}\cdot 3}_{-3\cdot 1\cdot 1\cdot 3} + \underbrace{5\,\frac{5\sin 5x\cos 3x}{5x}}_{5\cdot 5\cdot 1\cdot 1}\right)$$

$$\overset{VOAL}{=} \frac{1}{2}\cdot 1\,(-9+25) = \underline{\underline{8}}$$

VOLSF $\quad f(y) = e^y \quad g(x) = \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\cos 3x}{\cos 5x}\right) \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 8 \quad \lim_{y\to 8} e^y = e^8 \quad$ (S) e^y spojitá

$f(y) = \cos y \qquad \lim_{y\to 0}\cos y = 1 \qquad$ (S) $\cos y$ spojitá v 0

$g_1(x) = 5x$

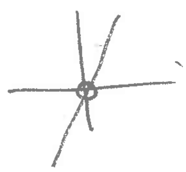
$g_2(x) = 3x \qquad \lim_{x\to 0} g_{1,2}(x) = 0$

VOLSF $\quad f(y) = \frac{\sin y}{y} \qquad \lim_{y\to 0} f(y) = 1 \qquad$ (P) $\;3x \neq 0$ na $P(0,1)$

$5x \neq 0$ -||-

$g_1(x) = 5x$

$g_2(x) = 3x \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = 0$



4d

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos \arctan \sqrt{n}}{\sin \operatorname{arccot} \sqrt{n}} = 1$$

Heine $x_n = \sqrt{n}$ $x_n \to \infty$ $x_n \neq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(\arctan x)}{\sin(\operatorname{arccot} x)} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{arccot} x}{\sin \operatorname{arccot} x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\cos(\arctan x)}{\operatorname{arccot} x}}_{1}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(\arctan x)}{\operatorname{arccot} x} \overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{-}\sin(\arctan x) \cdot \cancel{\frac{1}{1+x^2}}}{\cancel{-\frac{1}{1+x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sin(\arctan x) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

VOLSF $f(y) = \frac{y}{\sin y}$ $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$ (P) $\operatorname{arccot} x \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$g(x) = \operatorname{arccot} x$ $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arccot} x = 0$

VOLSF $f(y) = \sin y$ $\lim_{y\to \pi/2} \sin y = 1$ (S) $\sin y$ spoj $\forall y \in \mathbb{R}$

$g(x) = \arctan x$ $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \pi/2$

4e

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\sqrt{n^2+1}} = \infty$$

Heine $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad x_n \to 0 \quad \frac{1}{n} \neq 0 \ \forall n$

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \ln(1+x)\right)^{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\sqrt{1+1/x^2} \cdot \ln(1+\ln(1+x))}$$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{e^{\sqrt{1+1/x^2}}}_{\to e^{\infty}=\infty} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+\ln(1+x))}{1+\ln(1+x)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{(1+\ln(1+x))}_{\to 1+0} \overset{\text{VOAL}}{=} \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\ln(1+x))}{1+\ln(1+x)} \overset{\text{l'H}}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\ln(1+x)} \cdot \frac{1}{\cancel{1+x}}}{\frac{1}{\cancel{1+x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\ln(1+x)} \overset{\text{VOAL}}{=} \frac{1}{1+0}$$

VOLSF $\quad g(x) = 1+x \quad$ (S) $\ln$ spoj ~ 1

$f(y) = \ln y$

$\lim_{x\to 0} 1+x = 1 \qquad \lim_{y\to 1} \ln y = 0$

$$\lim_{x\to 0} e^{\sqrt{1+1/x^2}}$$

$f(y) = e^y \qquad \lim_{y\to\infty} e^y = \infty \qquad$ (P) $g(x) \neq \infty$ $\forall x \in P(0, 2)$

$g(x) = \sqrt{1+1/x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \sqrt{1+1/x^2} = \infty$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{1+1/x^2} = \infty$$

$f(y) = \sqrt{y} \qquad \lim_{y\to\infty} \sqrt{y} = \infty \qquad$ (P) $1+1/x^2 \neq \infty$ $\forall x \in P(0, 1/20)$

$g(x) = 1 + 1/x^2 \qquad \lim_{x\to 0} 1+\frac{1}{x^2} = 1+\infty = \infty$

$1/x^2$