Příklady

Spočtěte derivace následujících funkcí, určete definiční obory funkcí i jejich derivací

1. (a) $6x$

   Řešení: $(6x)' = 6 \cdot 1$, $x \in \mathbb{R}$

   (b) $x^3 + 2x - \sin x + 2$

   Řešení: $(x^3 + 2x - \sin x + 2)' = 3x^2 + 2 - \cos x + 0$, $x \in \mathbb{R}$

   (c) $-2\cos x + 4e^x + \frac{1}{3}x^7$

   Řešení: $(-2\cos x + 4e^x + \frac{1}{3}x^7)' = -2 \cdot (-\sin x) + 4e^x + \frac{1}{3} \cdot 7x^6$, $x \in \mathbb{R}$

   (d) $\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

   Řešení: $(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}})' = (x^{1/2} + 2x^{-1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} - 2\frac{1}{2}x^{-3/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$,
   $x > 0$

   (e) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^7}$

   Řešení: $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^7})' = (x^{1/3} - x^{7/4})' = 1/3x^{-2/3} - 7/4x^{3/4} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}$
   $x > 0$

   (f) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

   Řešení:

   $$\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)' = \left(x^{-1} + 2x^{-2} + 3x^{-3}\right)' = -x^{-2} - 4x^{-3} - 9x^{-4}$$

   $x \neq 0$

   (g) $\ln x + \frac{\cos x}{\pi}$

   Řešení: $(\ln x + \frac{\cos x}{\pi})' = \frac{1}{x} - \frac{1}{\pi}\sin x$
   $x > 0$

   (h) $\cot x + \tan x$

   Řešení: $(\cot x + \tan x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$
   $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

   (i) $\arcsin x - 3\operatorname{arccot} x$

   Řešení: $(\arcsin x - 3\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+x^2}$
   $x \in (-1, 1)$

   (j) $2\arctan x + \arccos x$

   Řešení: $(2\arctan x + \arccos x)' = \frac{2}{1+x^2} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $x \in \mathbb{R}$

2. (a) xe^x
Řešení:
$$(xe^x) = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x$$
$x \in \mathbb{R}$
(b) $\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$
Řešení:
$$\left(\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}\right)' = \frac{(1+x-x^2)'(1-x+x^2)-(1+x-x^2)(1-x+x^2)'}{(1-x+x^2)^2}$$
$$= \frac{(1-2x)(1-x+x^2)-(1+x-x^2)(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2}$$
$x \in \mathbb{R}$
(c) $x^2e^x \sin x$
Řešení:
$$(x^2e^x\sin x)' = (x^2)'e^x\sin x + x^2(e^x\sin x)' = 2xe^x\sin x + x^2((e^x)'\sin x + e^x(\sin x)')$$
$$= 2xe^x\sin x + x^2(e^x\sin x + e^x\cos x)$$
$x \in \mathbb{R}$
(d) $\dfrac{3x-2}{x^2+1}$
Řešení:
$$\left(\frac{3x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{3(1+x^2)-(3x-2)2x}{(1+x^2)^2}$$
$x \in \mathbb{R}$
(e) $e^x(x^2-2x+2)$ **Řešení:** Aritmetika derivací. Tedy:
$$(e^x(x^2-2x+2))' \overset{AD}{=} e^{x\prime}(x^2-2x+2) + e^x(x^2-2x+2)' =$$
$$e^x(x^2-2x+2) + e^x(2x-2) = e^x \cdot x^2$$
Věta použita, neb e^x je spojité všude.
(f) $\dfrac{1}{\ln x}$
Řešení:
$$\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = \frac{0-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x\ln^2 x}$$
$x > 0,\ x \neq 1$

(g) $\dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}, \qquad p,q>0$

Řešení: Dce podílu a zároveň součinu:

$$\left(\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}\right)' \overset{AD}{=} \frac{[px^{p-1}(1-x)^q + x^p q(1-x)^{q-1}(-1)](1+x) - x^p(1-x)^q\cdot 1}{(1+x)^2}$$

Podmínky: $x \neq -1$, což nám zároveň zaručí spojitost pro podmínky věty.

3. (a) arcctg $2x$

Řešení: $(\operatorname{arcctg} 2x)' = \frac{-1}{1+(2x)^2}\cdot 2\ x\in\mathbb{R}$

(b) $(3x^2-2x+10)^{10}$

Řešení: $(3x^2-2x+10)^{10} = 10(3x^2-2x+10)^9(6x-2)$, $x\in\mathbb{R}$

(c) $\sqrt{x} - \arctan\sqrt{x}$

Řešení:

$$(\sqrt{x} - \arctan\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$x>0$

(d) $\ln^3 x^2$ **Řešení:**

$$(\ln^3 x^2)' = 3(\ln^2 x^2)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x$$

$x>0$

(e) $\sqrt{4-x^2}$

Řešení:

$$\sqrt{4-x^2}' = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(-2x)$$

$x\in(-2,2)$

(f) $\ln(\sin x)$ **Řešení:**

$$(\ln(\sin x))' = \frac{1}{\sin x}\cos x$$

$\sin x>0$, tedy $x\in(0,\pi)+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

(g) $\ln\ln(x-3) + \arcsin\dfrac{x-5}{2}$

Řešení:

$$\left(\ln\ln(x-3) + \arcsin\frac{x-5}{2}\right)' = \frac{1}{\ln(x-3)}\frac{1}{x-3} + \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x-5}{2})^2}}\frac{1}{2}$$

$x>3$, $x-3>1$, tedy $x>4$. Navíc $3<x<7$. Celkem $4<x<7$

(h) x^x

Řešení: Tady nutno nejprve rozepsat a až poté derivovat:

$$x^x = e^{x \ln x}.$$

To je složená funkce, tedy: $f(x) = e^y$, $f'(x) = e^y$ a $g(x) = x \ln x$ a $g'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$ (derivace součinu, x je spojité na celém $\mathbb{R}$). Celkem máme:

$$(e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

Jelikož se x vyskytuje v logaritmu, tak $x > 0$. Jinak x i $\ln x$ jsou spojité a jejich součin je také spojitý, máme podmínky věty.

(i) $x^{(\sin x)}$

Řešení:

$$(x^{\sin x})' = (e^{\sin x \ln x})' = e^{\sin x \ln x} \cdot (\cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$x > 0$

(j) $\sin(\sin(\sin x))$

Řešení: Také složená funkce:

$$(\sin(\sin(\sin x)))' \stackrel{SD}{=} \cos(\sin(\sin x)) \cdot (\sin(\sin x))' \stackrel{SD}{=}$$
$$\cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot (\sin x)' \stackrel{SD}{=} \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot (\cos x)$$

Všechny funkce jsou spojité na $\mathbb{R}$, tak podmínky věty splněny.

(k) $\ln(\ln^2(\ln^3 x))$

Řešení: Úloha na víceré užití složené funkce, začneme od začátku: $f(x) = \ln y$, $f'(x) = \frac{1}{y}$, $g(x) = \ln^2(\ln^3 x)$, s její derivací počkáme. Takže máme:

$$(\ln(\ln^2(\ln^3 x)))' \stackrel{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot (\ln^2(\ln^3 x))'$$

věnujme se zbylé derivaci, vnější funkce $f(x) = y^2$, $f'(x) = 2y$ a vnitřní $g(x) = \ln(\ln^3 x)$. Celkem:

$$(\ln^2(\ln^3 x))' \stackrel{SD}{=} 2\ln(\ln^3 x) \cdot (\ln(\ln^3 x))'.$$

Dále, vnější $f(x) = \ln y$, $f'(x) = \frac{1}{y}$ a vnitřní $g(x) = \ln^3 x$, derivace se uvidí za chvíli. Získali jsme:

$$(\ln(\ln^3 x))' \stackrel{SD}{=} \frac{1}{\ln^3 x} \cdot (\ln^3 x)'$$

Pokračujeme, vnější $f(x) = y^3$, $f'(x) = 3y^2$ a vnitřní $g(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, celkem

$$(\ln^3 x)' = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$$

Takže celé dohromady to je:

$$(\ln(\ln^2(\ln^3 x)))' \overset{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot (\ln^2(\ln^3 x))' \overset{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot (\ln(\ln^3 x))' \overset{SD}{=}$$

$$\frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot (\ln^3 x)' \overset{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot 3\ln^2 x \cdot (\ln x)' \overset{SD}{=}$$

$$\frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x\ln(\ln^3 x)\ln x}$$

Věty jsme používali bez předpokladů, je potřeba je doplnit. Polynomy i logaritmy jsou spojité na svém definičním oboru, takže ten musíme určit. Z logaritmů máme

$$\ln^2(\ln^3 x) > 0$$
$$|\ln^3 x| > 1$$
$$\ln x > 1$$
$$x > e.$$

(l) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

Řešení: derivujeme podíl a ještě dvě složené funkce. Nejprve podíl (vše je spojité):

$$\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}\right)' \overset{AD}{=} \frac{(\sin^2 x)' \sin x^2 - \sin^2 x(\sin x^2)'}{(\sin x^2)^2}$$

a nyní se podíváme na ty složené fce: první případ – $\sin^2 x$, vnější $f(x) = y^2$, $f'(x) = 2y$ a vnitřní $g(x) = \sin x$, $g'(x) = \cos x$, sinus je spojitý, dohromady $(\sin^2 x)' \overset{SD}{=} 2\sin x \cdot \cos x$.
druhý případ – $\sin x^2$, vnější $f(x) = \sin y$, $f'(x) = \cos y$, vnitřní $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$. Polynomy jsou spojité, máme tedy dohromady
$(\sin x^2)' \overset{SD}{=} \cos x^2 \cdot 2x$
Dosadíme zpět a máme:

$$\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}\right)' \overset{AD}{=} \frac{(\sin^2 x)' \sin x^2 - \sin^2 x(\sin x^2)'}{(\sin x^2)^2} \overset{SD}{=}$$
$$\frac{2\sin x\cos x\sin x^2 - \sin^2 x\cos x^2 2x}{(\sin x^2)^2}$$

Podmínky: ve jmenovateli nesmí být nula, tedy $x^2 \neq k\pi$.

(m) $2^{\tan\frac{1}{x}}$

Řešení: Nejprve přepíšeme

$$2^{\tan\frac{1}{x}} = e^{\tan\frac{1}{x}\cdot\ln 2}$$

a uvědomíme si, že $\ln 2$ je úplně obyčejná konstanta ten zbytek je složená funkce. Máme vnější funkci $f(x) = e^y$, $f'(x) = e^y$, vnitřní $g(x) = \ln 2\tan\frac{1}{x}$, spojitost vyřešíme za chvíli a máme:

$$\left(e^{\tan\frac{1}{x}\cdot\ln 2}\right)' = e^{\tan\frac{1}{x}\cdot\ln 2}\cdot\left(\ln 2\tan\frac{1}{x}\right)'$$

Opět složená funkce, vnější $f(x) = \tan y$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 y}$ vnitřní $g(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x}$ je spojitá mimo nulu, celkem $\left(\tan\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}$ takže máme:

$$\left(e^{\tan\frac{1}{x}\cdot\ln 2}\right)' = e^{\tan\frac{1}{x}\cdot\ln 2}\cdot\left(\tan\frac{1}{x}\right)' = 2^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\ln 2\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}$$

Podmínky: $\frac{1}{x}\neq 0$ a kvůli tangens $\frac{1}{x}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Potřebovali jsme spojitost $\tan\frac{1}{x}$, který je spojitý na konkrétních intervalech, což bude stačit, protože stačí spojitost na okolí.

(n) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{arccotg}\,\dfrac{\sqrt{2}}{x}$

Řešení: Složená funkce: vnější $f(x) = \text{arcctg}\,y$, $f'(y) = \frac{-1}{1+y^2}$ a vnitřní $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}$, $g'(x) = \sqrt{2}\frac{-1}{x^2}$, g je spojitá mimo 0, takže:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arcctg}\,\frac{\sqrt{2}}{x}\right)' \overset{SD}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{1+\frac{2}{x^2}}\sqrt{2}\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{2+x^2}$$

Podmínky: $x\neq 0$.

Z Věty 4.1 bod d) nyní vyplývá, že funkce $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ má vlastní derivaci v každém bodě z D_f, neboť v každém takovém bodě je splněn předpoklad $f_2(x) \neq 0$. Vychází potom

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)}{[f_2(x)]^2} = \\ &= \frac{(e^x \sin x + e^x \cos x)(x^2 - 3x + 2) - e^x \sin x (2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \\ &= \frac{e^x \sin x (x^2 - 5x + 5) + e^x \cos x (x^2 - 3x + 2)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \\ &= e^x \frac{(x^2 - 5x + 5)\sin x + (x^2 - 3x + 2)\cos x}{(x^2 - 3x + 2)^2}. \end{aligned}$$

▲

(4a) **Příklad 4.5.** Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Řešení. Zde musíme danou funkci chápat především jako funkci složenou. Situace je zde následující:

vnější funkce $f_1(y) = \ln y, \quad D_{f_1} = (0, +\infty)$;

vnitřní funkce $f_2(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad D_{f_2} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Vnitřní funkci bychom sice mohli brát s definičním oborem $(-\infty, +\infty)$, ale nemělo by to smysl, neboť funkce $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ zobrazuje interval $\langle -1, 1 \rangle$ do intervalu $(-\infty, 0\rangle$, na kterém funkce f_1 není definována. Zřejmě je:

$$f(x) = (f_1 \circ f_2)(x), \qquad D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Máme $f_1'(y) = \frac{1}{y}$ na D_{f_1},

$$f_2'(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{na } D_{f_2}.$$

Podle věty o derivaci složené funkce (Věta 4.2) má funkce $f(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$ vlastní derivaci v každém bodě z D_f a platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f_1 \circ f_2)'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x) = \\ &= \frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \cdot \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{x^4 - 1}. \end{aligned}$$

Při běžném výpočtu si ovšem uvědomujeme pouze v duchu, která funkce je vnější a která vnitřní. Zápis by potom vypadal následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \left(\ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' &= \frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \cdot \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{x^4 - 1} \end{aligned}$$

(pokud by nebyl ještě kratší). Povšimněte si, že výraz $\frac{4x}{x^4-1}$ je definován i v bodech intervalu $(-1, 1)$, ve kterých funkce f vůbec není definována, a tudíž tam nemůže mít ani derivaci. S tímto jevem se lze setkat častěji a není třeba se jím nikterak znepokojovat. ▲

(45)

(179) Zderivujte

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Řešení:

$$f'(x) = \frac{-1}{1 + \left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-1}{\frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2}{x^2 + 1}.$$

Now we choose $u = h(t) = 2\sqrt{t}$ and $k(u) = 1 - e^u$, so $g(t) = k(h(t))$. Then $h'(t) = 2 \cdot \frac{1}{2}t^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{t}}$ and $k'(u) = -e^u$, so

$$g'(t) = -e^u \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} = -\frac{e^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}.$$

Using the chain rule to combine the derivatives of $f(x)$ and $g(t)$, we have

$$\frac{d}{dx}(1 - e^{2\sqrt{t}})^{19} = 19x^{18}\left(-\frac{e^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\right) = -19\frac{e^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\left(1 - e^{2\sqrt{t}}\right)^{18}.$$

It is often faster to use the chain rule without introducing new variables, as in the following examples.

(4e)

Example 4 Differentiate $\sqrt{1 + e^{\sqrt{3+x^2}}}$.

Solution The chain rule is needed four times:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1 + e^{\sqrt{3+x^2}}}\right) &= \frac{1}{2}\left(1 + e^{\sqrt{3+x^2}}\right)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}\left(1 + e^{\sqrt{3+x^2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + e^{\sqrt{3+x^2}}\right)^{-1/2} \cdot e^{\sqrt{3+x^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{3+x^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + e^{\sqrt{3+x^2}}\right)^{-1/2} \cdot e^{\sqrt{3+x^2}} \cdot \frac{1}{2}\left(3+x^2\right)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}\left(3+x^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + e^{\sqrt{3+x^2}}\right)^{-1/2} \cdot e^{\sqrt{3+x^2}} \cdot \frac{1}{2}\left(3+x^2\right)^{-1/2} \cdot 2x.\end{aligned}$$

Example 5 Find the derivative of e^{2x} by the chain rule and by the product rule.

Solution Using the chain rule, we have

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}) = e^{2x} \cdot \frac{d}{dx}(2x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}.$$

Using the product rule, we write $e^{2x} = e^x \cdot e^x$. Then

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}) = \frac{d}{dx}(e^x e^x) = \left(\frac{d}{dx}(e^x)\right)e^x + e^x\left(\frac{d}{dx}(e^x)\right) = e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x = 2e^{2x}.$$

Using the Product and Chain Rules to Differentiate a Quotient

If you prefer, you can differentiate a quotient by the product and chain rules, instead of by the quotient rule. The resulting formulas may look different, but they will be equivalent.

Example 6 Find $k'(x)$ if $k(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Solution One way is to use the quotient rule:

$$\begin{aligned}k'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

(1d) $3^{2x+7} = e^{(2x+7)\ln 3}$

$$\left(e^{(2x+7)\ln 3}\right)' = e^{(2x+7)\ln 3} \cdot 2\ln 3 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$= \underline{3^{2x+7} \cdot 2\ln 3}$$

(1e) $$(\sqrt{x}\, e^{-x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} + \underline{\sqrt{x}\, e^{-x}(-1)} \qquad x > 0$$

(1f) $$\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\right)' = \frac{(e^{x}+e^{-x})(e^{x}+e^{-x}) - (e^{x}-e^{-x})(e^{x}-e^{-x})}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2\overbrace{e^{-x}e^{x}}^{1} - (e^{2x} + e^{-2x} - 2\overbrace{e^{x}e^{-x}}^{1})}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

$$= \underline{\frac{4}{\left(e^{x}+\frac{1}{e^{x}}\right)^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

(1g) $$(\sin(\arcsin x))' = \underline{\cos(\arcsin x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$x \in (-1, 1)$

(1h) $$(\ln(1-e^{-x}))' = \underline{\frac{1}{1-e^{-x}}} \cdot e^{-x} \qquad x \neq 0$$

$1 - e^{-x} > 0 \qquad x > 0$

$1 > e^{-x}$

(1i) $$(\cos(\arctan 3x))' = \underline{-\sin(\arctan 3x) \cdot \frac{1}{1+9x^2} \cdot 3} \qquad x \in \mathbb{R}$$

(1j) $$(\ln(\ln x) + \ln(\ln 2))' = \underline{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}} + 0 \qquad x > 0$$

$\ln x > 0$

$\underline{x > 1}$

 zdroj : Sbírka J. Vanžury

Podle věty o limitě derivace zde bez nesnází zjistíme, že $f'_+(-a) = 0$ a $f'_-(a) = 0$. Můžeme potom napsat

$$f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{na } \langle -a, a \rangle,$$

kde v krajních bodech opět rozumíme příslušné jednostranné derivace. ▲

Příklad 4.12. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = |x|$.

Řešení. Zřejmě $D_f = (-\infty, +\infty)$. Zde je výhodné napsat

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ x & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty), \end{cases}$$

neboť odtud ihned plyne, že

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \quad \text{pro } x \in (-\infty, 0), \qquad f'_-(0) = -1, \\ f'(x) &= 1 \quad \text{pro } x \in (0, +\infty), \qquad f'_+(0) = 1. \end{aligned}$$

Z těchto výsledků vidíme podle Věty 4.3, že funkce $f(x) = |x|$ nemá v bodě 0 derivaci a že $D_{f'} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Můžeme napsat

$$f'(x) = \operatorname{sign} x \qquad \text{pro } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Podotkněme ještě, že výskyt absolutní hodnoty ve vyjádření funkce mnohdy způsobuje, že funkce v některých bodech nemá derivaci. Nemusí tomu ale tak být vždy, jak ukazuje následující příklad. ▲

Příklad 4.13. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = x \cdot |x|$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Opět použijeme postupu, který jsme viděli v předchozím příkladě. Můžeme psát

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ x^2 & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty). \end{cases}$$

Odtud

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x \quad \text{pro } x \in (-\infty, 0), \qquad f'_-(0) = 0, \\ f'(x) &= 2x \quad \text{pro } x \in (0, +\infty), \qquad f'_+(0) = 0. \end{aligned}$$

Vidíme především, že $f'(0) = 0$, a tedy $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$. Celkem můžeme napsat

$$f'(x) = 2\,|x|.$$

Závěrem si povšimněme následující skutečnosti. Funkce $f(x) = x \cdot |x|$ má tvar součinu, má v bodě 0 vlastní derivaci, ale tuto derivaci nemůžeme vypočíst podle Věty 4.1 bod c), neboť jedna funkce ze součinu — totiž funkce $|x|$ — nemá v bodě 0 derivaci (což jsme viděli v předchozím příkladě). ▲

Je tedy $D_{f'} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ a platí

$$f'(x) = \left(\arccos \frac{1}{|x|}\right)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

▲

Příklad 4.18. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = [x] \sin^2 \pi x$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Na základě našich zkušeností s funkcí $[x]$ víme, že je vhodné uvažovat interval $\langle n, n+1)$, kde n je celé (samozřejmě může být též záporné). Na tomto intervalu zřejmě je

$$f(x) = n \sin^2 \pi x,$$

a tudíž

$$f'(x) = n \cdot 2 \sin \pi x \cos \pi x \cdot \pi = \pi n \sin 2\pi x \qquad \text{pro } x \in (n, n+1), \qquad f'_+(n) = 0.$$

Zbývá tedy určit $f'_-(n+1)$. Pokusíme se opět použít větu o limitě derivace. Za tím účelem ukažme nejprve, že funkce $f(x)$ je v bodě $n+1$ spojitá zleva:

$$f(n+1) = [n+1] \sin^2 \pi(n+1) = (n+1) \cdot 0 = 0,$$
$$\lim_{x \to (n+1)-} f(x) = \lim_{x \to (n+1)-} n \sin^2 \pi x = 0.$$

Dále

$$\lim_{x \to (n+1)-} f'(x) = \lim_{x \to (n+1)-} (\pi n \cdot \sin 2\pi x) = 0,$$

odkud vyplývá, že $f'_-(n+1) = 0$. Na základě těchto výsledků snadno vidíme, že funkce $f(x)$ má vlastní derivaci i v každém celočíselném bodě n, přičemž platí $f'(n) = 0$. Můžeme tedy napsat, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$ a že

$$f'(x) = \begin{cases} \pi n \cdot \sin 2\pi x & \text{pro } x \in (n, n+1), \\ 0 & \text{pro } x = n. \end{cases}$$

Chceme-li výsledek zapsat v hezčím tvaru (uvědomte si, že na intervalu $\langle n, n+1)$ je $[x] = n$), můžeme psát

$$f'(x) = \pi [x] \sin 2\pi x.$$

▲

Příklad 4.19. Vypočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{pro } x \in (-\infty, 1), \\ (1-x)(2-x) & \text{pro } x \in \langle 1, 2\rangle, \\ -(2-x) & \text{pro } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Použijeme opět naší osvědčené metody. Můžeme psát:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{pro } x \in (-\infty, 1\rangle, \\ (1-x)(2-x) & \text{pro } x \in \langle 1, 2\rangle, \\ -(2-x) & \text{pro } x \in \langle 2, +\infty). \end{cases}$$

Odtud

$$\begin{array}{lll} f'(x) = -1 & \text{pro } x \in (-\infty, 1), & f'_-(1) = -1, \\ f'(x) = 2x - 3 & \text{pro } x \in (1, 2), & f'_+(1) = -1, \quad f'_-(2) = 1, \\ f'(x) = 1 & \text{pro } x \in (2, +\infty), & f'_+(2) = 1. \end{array}$$

Vidíme ihned, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$. Celkový výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x \in (-\infty, 1), \\ 2x - 3 & \text{pro } x \in \langle 1, 2 \rangle, \\ 1 & \text{pro } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

▲

Příklad 4.20. Vypočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle, \\ 0 & \text{všude jinde.} \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Povšimněme si, že můžeme napsat

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, a \rangle, \\ (x-a)^2(x-b)^2 & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle, \\ 0 & \text{pro } x \in \langle b, +\infty). \end{cases}$$

Odtud získáme ihned

$$\begin{array}{lll} f'(x) = 0 & \text{pro } x \in (-\infty, a), & f'_-(a) = 0, \\ f'(x) = 2(x-a)(x-b)(2x-a-b) & \text{pro } x \in (a, b), & f'_+(a) = 0, \quad f'_-(b) = 0, \\ f'(x) = 0 & \text{pro } x \in (b, +\infty), & f'_+(b) = 0. \end{array}$$

Zase vidíme, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$ a celkový výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)(2x-a-b) & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle, \\ 0 & \text{všude jinde.} \end{cases}$$

▲

Příklad 4.21. Vypočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ \ln(1+x) & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty). \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$ a opět můžeme napsat

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in (-\infty, 0 \rangle, \\ \ln(1+x) & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty). \end{cases}$$

Odtud

$$\begin{array}{lll} f'(x) = 1 & \text{pro } x \in (-\infty, 0), & f'_-(0) = 1, \\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x} & \text{pro } x \in (0, +\infty), & f'_+(0) = 1. \end{array}$$

Příklad 4.30. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = (x-2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$ pro $x \neq 2$, $f(2) = 0$.

Řešení. Zřejmě $D_f = (-\infty, +\infty)$. Pro $x \neq 2$ dostáváme

$$f'(x) = \left((x-2)\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}\right)' = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} +$$

$$+ (x-2)\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{x^2-4x+5}.$$

Vzhledem k příznivému tvaru funkce $f(x)$ bude vhodné jednostranné derivace v bodě 2 počítat podle definice.

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} = -\frac{\pi}{2},$$

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} = \frac{\pi}{2}.$$

Tedy $D_{f'} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. ▲

Příklad 4.31. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \big|\ln|x|\big|$.

Řešení. $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Funkce $\ln x$ mění znaménko v bodě $x = 1$, takže funkce $\ln|x|$ bude měnit znaménko v bodech $x = -1$ a $x = 1$ (je to konečně sudá funkce). Snadno vidíme, že

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & \text{pro } x \in (-\infty, -1\rangle, \\ -\ln(-x) & \text{pro } x \in \langle -1, 0), \\ -\ln x & \text{pro } x \in (0, 1\rangle, \\ \ln x & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty). \end{cases}$$

Odtud

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} && \text{pro } x \in (-\infty, -1), && f'_-(-1) = -1, \\ f'(x) &= -\frac{1}{x} && \text{pro } x \in (-1, 0), && f'_+(-1) = 1, \\ f'(x) &= -\frac{1}{x} && \text{pro } x \in (0, 1), && f'_-(1) = -1, \\ f'(x) &= \frac{1}{x} && \text{pro } x \in (1, +\infty), && f'_+(1) = 1. \end{aligned}$$

Vidíme, že $D_{f'} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Celkový výsledek můžeme např. zapsat ve tvaru

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sign}(|x|-1)}{x}.$$

▲

Příklad 4.32. Vypočtěte $f^{(6)}$ a $f^{(7)}$ funkce $f(x) = x(2x-1)^2(x+3)^3$.

Řešení. Uvažovaná funkce je zřejmě polynomem stupně 6. Tedy $D_f = D_{f^{(6)}} = D_{f^{(7)}} = (-\infty, +\infty)$. Obecně snadno vidíme, že m-tá derivace polynomu stupně n při $m > n$ je rovna nule. Tedy $f^{(7)} = 0$. K výpočtu šesté derivace použijeme Leibnizovu formuli: