7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme *derivací* funkce f v bodě a. Značíme $f'(a)$.

Věta 2 (Aritmetika derivací)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a. Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Platí

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

(c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

vždy je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3 (O derivaci složené funkce)**.** Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 4. Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \to a_+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a_+} f'(x)$. Levá strana analogicky.

Hinty

$a^b = e^{b \ln a}$

Příklady

Spočtěte derivace následujících funkcí, určete definiční obory funkcí i jejich derivací

1. (a) $6x$ (b) $x^3 + 2x - \sin x + 2$ (c) $-2\cos x + 4e^x + \frac{1}{3}x^7$ (d) $\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ (e) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x^7}$

(f) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

(g) $\ln x + \frac{\cos x}{\pi}$

(h) $\cot x + \tan\, x$

(i) $\arcsin\, x - 3\mathrm{arccot}\, x$

(j) $2\arctan\, x + \arccos\, x$

2. (a) xe^x

   (b) $\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

   (c) $x^2e^x \sin x$

   (d) $\frac{3x-2}{x^2+1}$

   (e) $e^x(x^2-2x+2)$

   (f) $\frac{1}{\ln x}$

   (g) $\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$, $p, q > 0$

3. (a) $\mathrm{arcctg}\, 2x$

   (b) $(3x^2-2x+10)^{10}$

   (c) $\sqrt{x} - \arctan\, \sqrt{x}$

   (d) $\ln^3 x^2$

   (e) $\sqrt{4-x^2}$

   (f) $\ln(\sin x)$

   (g) $\ln\ln(x-3) + \arcsin\, \frac{x-5}{2}$

   (h) x^x

   (i) $x^{(\sin x)}$

   (j) $\sin(\sin(\sin x))$

   (k) $\ln(\ln^2(\ln^3 x))$

   (l) $\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

   (m) $2^{\tan\, \frac{1}{x}}$

   (n) $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arccotg}\, \frac{\sqrt{2}}{x}$

4. (a) $\ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$

   (b) $\mathrm{arccot}\, \frac{2x}{x^2-1}$

   (c) $\sqrt{1+e^{\sqrt{3+x^2}}}$

   (d) 3^{2x+7}

   (e) $\sqrt{x}e^{-x}$

   (f) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

   (g) $\sin(\arcsin\, x)$

   (h) $\ln(1-e^{-x})$

   (i) $\cos(\arctan\, 3x)$

   (j) $\ln(\ln x) + \ln(\ln 2)$

Bonus

5. Vypočtěte derivace (i jednostranné) následujících funkcí

   (a) $f(x) = |x|$

   (b) $f(x) = x \cdot |x|$

   (c)
   $$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in (-\infty, 1) \\ (1-x)(2-x), & [1,2] \\ -(2-x), & (2,\infty) \end{cases}$$

   (d) $f(x) = |\ln|x||$