6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. Spočtěte limity zadaných funkcí

   (a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\ln(1+3x)}{3x} =$$

VOLSF, podmínka P: $3x \neq 0$ na okolí 0.

   (b)

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} -3\frac{\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{-3}{x}} = -3$$

VOLSF, podmínka P: $-3/x \neq 0$ na okolí ∞.

   (c)

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x}$$

Sbírka řešených úloh

Limita cyklometrické funkce V.

Úloha číslo: 1194

VŠ

Určete limitu funkce

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x}.$$

Řešení

Určujeme limitu funkce

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x}.$$

Podle úlohy Základní limity cyklometrických funkcí máme, že

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2}.$$

Pomocí věty o aritmetice limit můžeme tedy psát

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} =$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\arccos x} =$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

Následně vytknutím a opětovným použitím věty o aritmetice limit dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x\to 1-} \sqrt{e^{2x}} \cdot \lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^{2-2x} - 1}}{\sqrt{1-x}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{x\to 1-} e^x \cdot \lim_{x\to 1-} \sqrt{\frac{e^{2(1-x)} - 1}{2(1-x)}} \cdot \sqrt{2} =$$

$$e^1 \cdot \lim_{x\to 1-} \sqrt{\frac{e^{2(1-x)} - 1}{2(1-x)}}.$$

Nyní nejprve ukážeme, že

$$\lim_{x\to 1-} \frac{e^{2(1-x)} - 1}{2(1-x)} = 1.$$

To plyne použitím věty o limitě složené funkce, neboť

$$\lim_{x\to 1-} 2(1-x) = 0,$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1,$$

$$2(1-x) \neq 0 \qquad \text{na} \quad (-1{,}1) \setminus \{0\}.$$

A protože odmocnina je spojitá v bodě 1, máme,

$$e^1 \cdot \lim_{x\to 1-} \sqrt{\frac{e^{2(1-x)} - 1}{1-x}} =$$

$$e \cdot \sqrt{\lim_{x\to 1-} \frac{e^{2(1-x)} - 1}{1-x}} = e \cdot \sqrt{1} = e.$$

(d) Vytkněte nejrychleji rostoucí člen z logaritmu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$$

Řešení:
Postupujeme vytknutím.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\ln x^{10}(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2+\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\ln x^{10}+\ln(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})} =$$

Z vlastností logaritmu:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x+\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{10\ln x+\ln(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})} =$$

A konečně poslední vytknutí

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})/\ln x}{10+\ln(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})/\ln x} = \frac{2+0}{10+0} = \frac{1}{5}.$$

Výpočet limity využívá věty o algebře limit a VOLSF (spojitost logaritmu)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{1}\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = \ln(1-0+0)\cdot 0 = 0.$$

(e) Zbavme se odmocniny

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$$

Řešení:
Sledujte výpočet.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x\sin x}-1)/x^2}{(e^{x^2}-1)/x^2} =$$

Po použití věty o limitě podílu (limita jmenovatele je rovna jedné) pokračujeme rozšířením odmocniny.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x\sin x-1}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1} = 1\cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

(f) Vytkněte dominantní člen z logaritmu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3 - \arctan x)}{\ln(x^2 + \arctan x)}$$

Řešení:

Vytkneme dominantní člen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3 - \arctan x)}{\ln(x^2 + \arctan x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^3 \left(1 - \frac{\arctan x}{x^3}\right)}{\ln x^2 \left(1 + \frac{\arctan x}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln x + \ln\left(1 - \frac{\arctan x}{x^3}\right)}{2\ln x + \ln\left(1 + \frac{\arctan x}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3 + \frac{\ln\left(1 - \frac{\arctan x}{x^3}\right)}{\ln x}}{2 + \frac{\ln\left(1 + \frac{\arctan x}{x^2}\right)}{\ln x}} \overset{VOAL}{=} \frac{3+0}{2+0}$$

Použili jsme limity

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{x^3} = 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{x^2},$$

neb $\arctan x$ je omezená a $1/x^2$ $(1/x^3)$ mizející funkce.

Dále jsme použili spojitosti logaritmu (v 1) a opět součin omezené a mizející.

(g)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\ln(x^2+4) - \ln x^2}}{\operatorname{arccotg} x}$$

Sbírka řešených úloh

Limita cyklometrické funkce VII.

Úloha číslo: 1196

VŠ

Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\log(n^2+4)-\log(n^2)}}{\operatorname{arccotg} n}.$$

Řešení

Určujeme limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\log(n^2+4)-\log(n^2)}}{\operatorname{arccotg} n}.$$

Dle Heineho věty platí, že pokud existuje limita funkce

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\log(x^2+4)-\log(x^2)}}{\operatorname{arccotg} x},$$

potom existuje i hledaná limita posloupnosti a je jí rovna.

Počítejme tedy limitu funkce. Nejprve užijeme pravidla, že rozdíl logaritmu je roven logaritmu podílu.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\log(x^2+4)-\log(x^2)}}{\operatorname{arccotg} x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\log\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right)}}{\operatorname{arccotg} x},$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\log\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{\operatorname{arccotg} x}.$$

Protože platí, že

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{4}{x^2} = 1,$$

a

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1,$$

vyplyne z věty o limitě složené funkce, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}} = 1.$$

K tomu stačí ověřit poslední předpoklad této věty, a sice, že na nějakém prstencovém okolí plus nekonečna je

$$1 + \frac{4}{x^2} \neq 1,$$

což je ale pravda např. na intervalu $(0, +\infty)$.

Tudíž po rozšíření

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\log\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{\operatorname{arccotg} x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{\log\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}} \cdot \frac{4}{x^2}}}{\operatorname{arccotg} x} =$$

použití věty o aritmetice limit

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{\log\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}}} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x \operatorname{arccotg} x} =$$

díky spojitosti odmocniny a limitě odvozené v úloze Základní limity cyklometrických funkcí

$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}}} \cdot \frac{2}{1} =$$

a díky výše odvozené limitě máme

$$= \sqrt{1} \cdot 2 = 2.$$

(h) Užijte vzorce pro logaritmus

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln(x+1) - \ln x\right]$$

Řešení: Užijeme pravidla, že rozdíl logaritmů je logaritmus podílu a spojitosti logaritmu.

$$\lim_{x\to+\infty} x[\ln(x+1) - \ln x] = \lim_{x\to+\infty} x \ln \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$$
$$\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \ln[e] = 1.$$

2. (a)

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$$

Řešení:

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)} = \lim_{x\to0} -\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\frac{-x^2}{\ln(1-x^2)} \overset{VOAL}{=} -1$$

Podmínka P pro $\pm x^2 \neq 0$ na okolí 0.

(b)

$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1-\frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{x}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{-2}{x^2}} \overset{VOAL}{=} 0\cdot 1 = 0$$

Podmínka P pro $-2/x^2 \neq 0$ na okolí ∞.

(c) Vytkněte nejrychleji rostoucí člen

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$$

Řešení:
Vytkneme. Pak použijte větu o algebře limit a spojitost logaritmu.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln e^{3x} + \ln(\frac{2}{e^{3x}}+1)}{\ln e^{2x} + \ln(\frac{3}{e^{2x}}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \ln(\frac{2}{e^{3x}}+1)}{2x + \ln(\frac{3}{e^{2x}}+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 + \ln(\frac{2}{e^{3x}}+1)/x}{2 + \ln(\frac{3}{e^{2x}}+1)/x} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}.$$

(d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x\sin x}}{e^{x^2}-1}$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x\sin x}}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x\sin x}/x^2}{(e^{x^2}-1)/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x\sin x}}{x^2} =$$

Protože $x\sin x$ je kladný výraz na okolí nuly, též tak x^2, můžeme doplnit absolutní hodnoty.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x\sin x|^{1/2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|^{1/2}}{|x|^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|^{1/2}}{|x|^{1/2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|}$$

$$= \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = 1 \cdot +\infty = +\infty.$$

(e) Užijte $a^x = e^{x\ln a}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x},$$

kde $a > 0$.

Řešení:

Substituujme $y = x + 1$ a posléze $y = e^z$. Pak máme

$$\lim_{y\to 1} \frac{\ln y}{y-1} = 1 \implies \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z-1} = 1 \implies \lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z} = 1.$$

Tím jsme spočítali příklad pro speciální případ, kdy a je rovno Eulerovu číslu e.

Nyní spočteme limitu pro obecné $a > 0$. V závěru substituujeme $y = x\ln a$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a} \cdot \ln a = \lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} \cdot \ln a = \ln a.$$

(f)

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$$

Řešení:

Zde výhodně využijeme znalosti limity $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$. Stačí upravovat

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-2+3}{x^2-2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{x^2-2} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{2} = e^3 \cdot 1^2 = e^3.$$

(g) Převeďte na základní limitu

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

Řešení: Protože $3^x \to 0$, pokud $x \to -\infty$, vede k cíli nenápadné rozšíření.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{3^x}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+2^x)}{2^x}}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{2^x} =$$

Substituce $y = 3^x$ a $z = 2^x$ dává (v kombinaci s faktem, že $\frac{3}{2} > 1$), že $(\frac{3}{2})^x$ klesá v minus nekonečnu k nule

$$= \frac{\lim\limits_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}}{\lim\limits_{z\to0}\frac{\ln(1+z)}{z}}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1}{1}\cdot 0 = 0.$$

(h) Vytkněte...

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$$

Řešení:
V čitateli vytkněte $\sqrt{x}$, dole $\sqrt[3]{x}$ (oba členy s nejvyšší mocninou u x).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x}+\ln(x^{-1/2}+1+x^{-1/6})}{\ln\sqrt[3]{x}+\ln(x^{-1/3}+1+x^{-1/12})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\ln x+\ln(x^{-1/2}+1+x^{-1/6})}{\frac{1}{3}\ln x+\ln(x^{-1/3}+1+x^{-1/12})} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}+\ln(x^{-1/2}+1+x^{-1/6})/\ln x}{\frac{1}{3}+\ln(x^{-1/3}+1+x^{-1/12})/\ln x} = \frac{\frac{1}{2}+0}{\frac{1}{3}+0} = \frac{3}{2}.$$

(i) Vytkneme dominantní člen

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

Řešení:
V čitateli i jmenovateli jsou dominantními členy exponenciály. Vytkneme je tedy.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3^x(3^{-x}+1)}{\ln 2^x(2^{-x}+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3^x+\ln(3^{-x}+1)}{\ln 2^x+\ln(2^{-x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln 3+\ln(3^{-x}+1)}{x\ln 2+\ln(2^{-x}+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3+\ln(3^{-x}+1)/x}{\ln 2+\ln(2^{-x}+1)/x} =$$

Věta o limitě podílu a o limitě součtu dává (s přihlédnutím k faktu, že $0/\infty = 0$)

$$= \frac{\ln 3 + \ln(0+1)/(+\infty)}{2 + \ln(0+1)/(+\infty)} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

3. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

vnitřní funkce:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1,$$

neboť další vnitřní funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(podmínka P, $g(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ pro $\forall x \in (0,\infty)$.)
Zpět k funkci

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1,$$

tady podmínka S, e^z je spojitá funkce v bodě 1.

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = e^{-2},$$

analogicky.

(c)

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^x$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}$$

vnitřní funkce:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{2}{x^2}} \overset{VOAL}{=} 0\cdot 1 = 0$$

Použita vnitřní funkce na logaritmus, podmínka P2, $2/x^2 \neq 0$ na $(0, \infty)$.
Celkem tedy

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^x = e^0 = 1,$$

(podmínka P1, e^z spojitá v 0.)

4. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$$

Řešení:
Použijeme úpravy na exponent a dostaneme

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \lim_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x)/[(1-x)(1+\sqrt{x})]} =$$

a nyní zkrácením a dosazením dostaneme

$$= \frac{2}{3}^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(b)

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$$

Řešení:
Použijeme klasický trik převedení do exponentu za použití vzorce $y = e^{\ln y}$.

$$= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \lim_{x\to +\infty} \exp\left[\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right) \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right] =$$

Symbolem $\exp[y]$ míníme totéž co e^y. Podle věty o limitě složené funkce (varianta (S)) lze symbolicky psát

$$= \exp\left[\lim_{x\to +\infty} \ln \frac{1+x}{2+x} \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right]$$

Limitu v závorce je jednoduché spočítat vytknutím x v čitateli a jmenovateli obou zlomků a vyjde, že

$$= \exp\left[\ln 1 \cdot 0\right] = \exp[0] = e^0 = 1.$$

Je potřeba ověřit podmínky VOLSF.

(c)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$$

Řešení:
Upravujeme.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\exp\left[\ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)\cdot x^2\right]=$$

Podle věty o limitě složené funkce lze symbolicky psát

$$=\exp\left[\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)\cdot x^2\right]=$$

Nyní zlomek konverguje k jedné polovině a logaritmus jedné poloviny je záporné číslo. Proto se od jistého velkého x se bude logaritmus lišit od $\ln\frac{1}{2}$ jen o velmi málo, zatímco x^2 poroste nade všechny meze.

$$=\exp\left[\ln\frac{1}{2}\cdot+\infty\right]=e^{-\infty}=0.$$

VOLSF, podmínka P.

(d)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$$

Řešení:
Upravujeme.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}=\lim_{x\to\infty}\exp\left[\ln\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)\cdot\frac{x^3}{1-x}\right]=$$

$$=\exp\left[\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)\cdot\frac{x^3}{1-x}\right]=\exp\left[\ln\frac{3}{2}\cdot-\infty\right]=e^{-\infty}=0.$$

(e)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}$$

Řešení:
Uvědomme si, že zkoumáme jednostrannou limitu. Proto jde exponent do $-\infty$ (to plyne z vlastností funkce tangens). Pokud si zároveň uvědomíme, že $\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi\geq\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ a že logaritmus čísla většího než jedna je kladný, máme

$$\lim_{x\searrow\frac{\pi}{4}}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}=\exp\left\{\lim_{x\searrow\frac{\pi}{4}}\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]\cdot\operatorname{tg}2x\right\}=$$
$$\exp\left\{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi\right)\cdot-\infty\right\}=e^{-\infty}=0.$$

(f)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\exp\left[\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x-1}{x+1}\right]=$$
$$=\exp\left[\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x-1}{x+1}\right]=\exp\left[\ln 1\cdot 1\right]=e^0=1.$$

(g)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}=\exp\left[\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)\cdot\frac{1}{x}\right]=\exp\left[\ln\frac{1}{2}\cdot 0\right]=e^0=1.$$

5. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x+1}{\ln x}\right)^{\ln x}$$

Řešení:

substituce $y=\ln x$ (věta o limitě složené funkce, podmínka P).

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x+1}{\ln x}\right)^{\ln x}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y+1}{y}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e.$$

(b)

$$\lim_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2x}}$$

Řešení:

$$= \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{x^2}{\sin^2 x}} =$$

Nyní použijeme triku exponenciály.

$$= \exp\left[\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\right] =$$

Protože logaritmus je spojitá funkce, je

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right] =$$

První limitu nyní spočteme substitucí $y=\frac{1}{x^2}$, druhou známe.

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right] = \exp\left[\ln e\cdot 1^2\right] = \exp[1] = e^1 = e.$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{cotg}^2 x} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{-1}\cdot\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} =$$

První limitu spočteme snadno dosazením, vyjde $(1+0)^{-1}=1^{-1}=1$. Zbyde tedy pouze druhá limita. V té vhodně rozšíříme.

$$= \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{x^2}{\sin^2 x}} =$$

Nyní použijeme triku exponenciály.

$$= \exp\left[\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\right] =$$

Protože logaritmus je spojitá funkce, je

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right] =$$

První limitu nyní spočteme substitucí $y=\frac{1}{x^2}$, druhou známe.

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right] = \exp\left[\ln e\cdot 1^2\right] = \exp[1] = e^1 = e.$$

(d)

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}} =$$

Řešení:
řešíme pomocí chytrého rozšíření exponentu a exponenciálního triku: využíváme též větu o limitě součinu a spojitost logaritmu (tj. možnost přehození limity a logaritmu).

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}\right]^{\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}} = \exp\left[\ln \lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}\right) \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}\right] =$$

Nyní první limita je po substituci $y = \operatorname{tg} x$ rovna e a druhá je zřejmě rovna jedné, jak plyne z faktu $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

$$= \exp[\ln e] = e^1 = e.$$

Pokud dáme oba výsledky dohromady a využijeme větu o limitě podílu, plyne odtud

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \frac{e}{e} = 1.$$

(e)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$$

Řešení:
Je zřejmé pomocí substituce $y = \sin x$, že

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

(Úplně lze důkaz provést počítáním jednostranných limit a substitucí $z = \frac{1}{y}$.)
Problematická je tedy pouze limita

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}} =$$

Tu řešíme pomocí chytrého rozšíření exponentu a exponenciálního triku: využíváme též větu o limitě součinu a spojitost logaritmu (tj. možnost přehození limity a logaritmu).

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}\right]^{\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}} = \exp\left[\ln \lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}\right) \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}\right] =$$

Nyní první limita je po substituci $y = \operatorname{tg} x$ rovna e a druhá je zřejmě rovna jedné, jak plyne z faktu $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

$$= \exp[\ln e] = e^1 = e.$$

Pokud dáme oba výsledky dohromady a využijeme větu o limitě podílu, plyne odtud

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \frac{e}{e} = 1.$$

(f)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

Řešení:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+(\sin x-1))^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[(1+(\sin x-1))^{\frac{1}{\sin x-1}}\right]^{(\sin x-1)\operatorname{tg} x} =$$

Přechod pomocí exponenciálního triku.

$$= \exp\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x-1)\operatorname{tg} x\right] = \exp\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x}\right] =$$

Nyní je možné použít pro lepší vhled třeba substituci $y = x-\pi/2$, přičemž se snadno ukáže ze součtových vzorců, že $\sin(y+\pi/2) = \cos y$ a $\cos(y+\pi/2) = -\sin y$.

$$= \exp\left[\lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1}{-\sin y}\right] = \exp\left[\lim_{y\to 0} \frac{\frac{1-\cos y}{y^2}}{\frac{\sin y}{y}}\cdot y\right] = \exp\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot 0\right] = e^0 = 1.$$

(g)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$$

Řešení:

Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a+2a}{x-a}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x = e^{2a}.$$

6. Nechť funkce f má v bodě x_0 limitu $A\in\mathbb{R}$ ($\lim_{x\to x_0} f(x) = A$). Ukažte, že pak

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |A|.$$

7. Najděte příklad funkce (stačí obrázkem), která:

   (a) Nemá limitu v nekonečnu.

   (b) Nemá limitu v čísle 3.

   (c) Má limitu v 0 zleva, ale ne zprava.

(d) Má v nekonečnu limitu nekonečno.

(e) Má v nekonečnu limitu -2.

(f) Nemá limitu v 0, ale její absolutní hodnota ano.

(g) Není spojitá v 0.

(h) Je nespojitá v nekonečnu.

(i) Je nespojitá v nekonečně mnoha bodech.

(j) Má limitu v nekonečnu a je rostoucí.

8. Rozhodněte, zda platí:

ANO-NE Má-li funkce limitu, tak má i limitu zleva a zprava.

ANO-NE Má-li funkce limitu zleva a zprava, má i limitu.

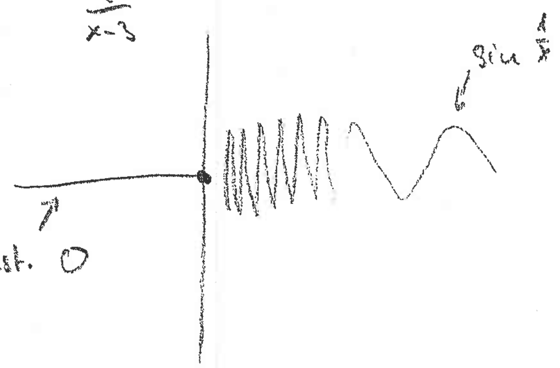
ANO-NE Je-li funkce omezená, pak má limitu v nekonečnu.

ANO-NE Je-li funkce lichá, pak má limitu v 0.

(5) (a) $\sin x$ nemá lim v ∞

(b) $\frac{1}{x-3}$

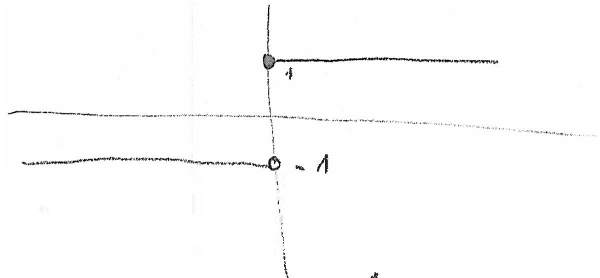
(c)



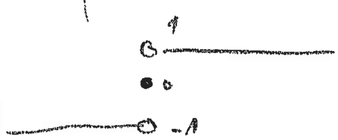
(d) x^2

(e) -2 nebo třeba $\frac{1}{x} - 2$

(f)

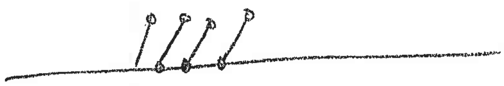


(g) sgn x



(h) žádná funkce není spojitá v ∞ - otázka nemá smysl

(i)



(j) x