6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Následující limity lze počítat přímo použitím exponenciálního triku, totiž postupem využívajícího větu o limitě složené funkce (u níž je pak třeba ověřit podmínky). Schematicky lze zapsat

$$\lim_{x\to a} f^g = \lim_{x\to a} e^{g\ln f} = e^{\lim\limits_{x\to a}(g\ln f)}.$$

Často se pro přehlednout píše e^y jako $\exp[y]$. Tedy předchozí řádek by vypadal

$$\lim_{x\to a} f^g = \lim_{x\to a} \exp[g\ln f] = \exp\left[\lim_{x\to a}(g\ln f)\right].$$

Limity typu 1^∞

Ukážeme si, jak se tato metoda používá na limity typu 1^∞. To znamená, že počítáme limitu $\lim f(x)^{g(x)}$, kde $\lim f(x) = 1$ a $\lim g(x) = \infty$. Velmi schematicky znázorněno:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to a}(1 + (f(x)-1))^{g(x)} = \exp\left[\lim_{x\to a} g(x)\ln(1 + (f(x)-1))\right] \\ &= \exp\left[\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)\frac{\ln(1+(f(x)-1))}{f(x)-1}\right] = \exp\left[\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)\right].\end{aligned}$$

Při výpočtech je pak třebě několikrát použít a ověřit podmínky VOLSF.

Dodejme, že tento převod se dá odvodit i jednodušseji s použitím limity $\lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1} = 1$, neboť (zkráceně psáno) platí

$$\lim f^g = \exp\left[\lim g\ln f\right] = \exp\left[\lim\left(\frac{\ln f}{f-1}\right)\cdot \lim g(f-1)\right] = \exp\left[\lim g(f-1)\right].$$

Hinty

$\alpha > 0, \beta > 0, c > 1$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\beta}{c^x} = 0. \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$a^b = e^{b \ln a}$ $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

Příklady

1. Spočtěte limity zadaných funkcí

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$$

(b)
$$\lim_{x\to \infty} x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)$$

(c)
$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x}$$

(d) Vytkněte nejrychleji rostoucí člen z logaritmu
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$$

(e) Zbavme se odmocniny
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$$

(f) Vytkněte dominantní člen z logaritmu
$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x^3 - \arctan x)}{\ln(x^2 + \arctan x)}$$

(g)
$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{\ln(x^2+4) - \ln x^2}}{\operatorname{arccotg} x}$$

(h) Užijte vzorce pro logaritmus
$$\lim_{x\to +\infty} x\,[\ln(x+1) - \ln x]$$

2. (a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$$

(b)
$$\lim_{x\to \infty} x \ln\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$$

(c) Vytkněte nejrychleji rostoucí člen
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}$$

(d)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x \sin x}}{e^{x^2} - 1}$$

(e) Užijte $a^x = e^{x \ln a}$,
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x},$$
kde $a > 0$.

(f)
$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$$

(g) Převeďte na základní limitu
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

(h) Vytkněte...
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$$

(i) Vytkneme dominantní člen
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

3. Spočtěte limity

(a)
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$
(b)
$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$$
(c)
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^x$$

4. Spočtěte limity

(a)
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$$
(b)
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$$
(c)
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$$
(d)
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$$
(e)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}\,2x}$$
(f)
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$
(g)
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}$$

5. Spočtěte limity

(a)
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x+1}{\ln x}\right)^{\ln x}$$
(b)
$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$
(c)
$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}\,^2 x}$$
(d)
$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}\,x)^{\frac{1}{\sin x}} =$$
(e)
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}\,x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$$
(f)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}\,x}$$
(g)
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$$

6. Nechť funkce f má v bodě x_0 limitu $A\in\mathbb{R}$ ($\lim_{x\to x_0} f(x)=A$). Ukažte, že pak
$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|A|.$$

7. Najděte příklad funkce (stačí obrázkem), která:

(a) Nemá limitu v nekonečnu.

(b) Nemá limitu v čísle 3.

(c) Má limitu v 0 zleva, ale ne zprava.

(d) Má v nekonečnu limitu nekonečno.

(e) Má v nekonečnu limitu -2.

(f) Nemá limitu v 0, ale její absolutní hodnota ano.

(g) Není spojitá v 0.

(h) Je nespojitá v nekonečnu.

(i) Je nespojitá v nekonečně mnoha bodech.

(j) Má limitu v nekonečnu a je rostoucí.

8. Rozhodněte, zda platí:

ANO-NE Má-li funkce limitu, tak má i limitu zleva a zprava.

ANO-NE Má-li funkce limitu zleva a zprava, má i limitu.

ANO-NE Je-li funkce omezená, pak má limitu v nekonečnu.

ANO-NE Je-li funkce lichá, pak má limitu v 0.