# 5. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

1. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$

   **Řešení:**

   Užijeme substituci $y = 5x$. Když $x \to 0$, potom také $y = 5x \to 0$, a proto platí:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\frac{y}{5}} = 5 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 5 \cdot 1 = 5.$$

   Použili jsme VOLSF a podmínku o vyhýbání se limitě.

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2}$

   **Řešení:**

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\sin 3x^2}{3x^2} \overset{VOAL}{=} 3 \cdot 1 = 3$$

   VOLSF, podmínka (P) a fakt, že $\lim_{x\to 0} 3x^2 = 0$.

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

   **Řešení:**

   Počítejme.

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{1-\cos 4x^2}$

   **Řešení:**

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{1-\cos 4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{(2x^2)^2}{1-\cos 4x^2} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

   VOLSF, podmínka (P) a fakt, že $\lim_{x\to 0} 2x^2 = 0$.

   (e) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{2x}}$

   **Řešení:**

   $$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{2x}} \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

   VOLSF, podmínka (P) a $\sqrt{x} \to 0+$ pro $x \to 0+$.

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

   **Řešení:**

Počítejme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}\frac{x^2}{\sqrt{x^4}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-\cos x^2}{x^4}}=2\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

VOLSF, $x^2\to 0$ pro $x\to 0$, (P).
VOLSF, vnější funkce $\sqrt{y}\to 1/\sqrt{2}$ pro $y\to 1/2$, podmínka (S).

(g) $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$

**Řešení:** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x}{1+x}=-1$, konkrétně $-1+$ (jdeme do -1 zprava). Z VOLSF, spojitost arcsin v $-1+$, pak máme

$$\lim_{x\to\infty}\arcsin\frac{1-x}{1+x}=-\frac{\pi}{2},$$

neb arcsin $-1=\frac{\pi}{2}$.

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$

**Řešení:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

pak VOLSF, spojitost logaritmu v 1 dává

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)=0,$$

neboť $\lim_{x\to 1}\ln x=1$.

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

**Řešení:** Prve upravme odmocniny

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{2}$$

Z VOLSF a spojitosti arccos v bodě $\frac{1}{2}$ máme

$$\lim_{x\to\infty}\arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

(j) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{cotg}3x$

**Řešení:** Počítejme.

$$\lim_{x\to 0}x\operatorname{cotg}3x=\lim_{x\to 0}x\frac{\cos 3x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{\cos 3x}{3}=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

VOLSF, $3x\to 0$ pro $x\to 0$, (P).

(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

**Řešení:** Všimneme si, že počítáme limitu v $\infty$.
Protože $-1 \le \sin x \le 1$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, platí:

$$0 \xleftarrow{x\to\infty} -\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0,$$

a tedy musí být podle věty o srovnání (=2 policajti).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$

**Řešení:**

Počítejme.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{\sin^3 x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x \cos x} =$$

Nyní vhodně rozšíříme

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}}{1^2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}.$$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$

**Řešení:**

Zlomek roztrhneme na dva a vhodně rozšíříme.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin x} - \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin x}{x}} \cdot 5 - \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}} \cdot 3 = \frac{1}{1} \cdot 5 - \frac{1}{1} \cdot 3 = 2.$$

VOLSF, vnitřní funkce $3x$ a $5x$, podmínka (P).

(n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$

**Řešení:** Přičteme a odečteme „chytrou jedničku“, zlomek roztrhneme na dva a vhodně rozšíříme.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{1-\cos x - (1-\cos 3x)}{x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{(3x)^2} \cdot 9 = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 4.$$

VOLSF, vnitřní funkce $3x$, podmínka (P).

(o) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

**Řešení:** Nejprve si výraz trochu zjednodušme.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x}\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} =$$

S přihlédnutím k faktu, že $\sin\frac{\pi}{2}=1$ a $\cos 0 = 1$ dostaneme

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x}\cdot\frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}}{\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x} =$$

Nyní pro názornost použijeme substituci $y=\frac{\pi}{4}-x$.

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\cos 2(\frac{\pi}{4}-y)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\cos(\frac{\pi}{2}-2y)} =$$

Dále užijeme součtový vzorec $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ na jmenovatel.

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\cos\frac{\pi}{2}\cos 2y+\sin\frac{\pi}{2}\sin 2y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\sin 2y} =$$

A nyní přijde chytré rozšíření.

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\sin y}{y}}{\frac{\sin 2y}{2y}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(p) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

**Řešení:** Počítejme.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = 1\cdot\cos\frac{a+a}{2} = \cos a.$$

(q) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$

**Řešení:**

Trik je v použití metod na rozklad kvadratického trojčlenu (třeba počítáním kořenů kvadratické rovnice nebo uhodnutím). Zde platí

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(2\sin x-1)(\sin x+1)}{(2\sin x-1)(\sin x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+1}{\sin x-1} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1} = -3.$$

(r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

**Řešení:**

Počítejme. Nejprve se vypořádáme s odmocninami.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{tg} x - 1 - \sin x}{x^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

Máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x}} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{2}.$$

Pro druhou limitu pak platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1-\cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x} = \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{2}.$$

Celkem pro původní limitu dostaneme z VOAL $\frac{1}{4}$.

(s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

**Řešení:**

Počítejme. Nejprve se vypořádáme s odmocninami.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+x\sin x - \cos x} \cdot \frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+x\sin x - \cos x} \cdot \frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{1}$$

$$= \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{1}$$

$$\overset{VOAL}{=} 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = 2 \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}.$$

(t) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$

**Řešení:**

Substituujeme $y = x - \pi$. Jestliže $x \to \pi$, potom $y \to 0$, a tedy platí.

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin m(y+\pi)}{\sin n(y+\pi)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(my+m\pi)}{\sin(ny+n\pi)} =$$

Nyní použijeme součtový vzorec $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ a přihlédneme k faktu, že $\cos m\pi = (-1)^m$ a $\sin m\pi = 0$ pro libovolné $m$ přirozené.

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin my \cos m\pi + \sin m\pi \cos my}{\sin ny \cos n\pi + \sin n\pi \cos ny} = \lim_{y\to 0} \frac{(-1)^m \sin my}{(-1)^n \sin ny} =$$

Nyní jrozšíříme, použijeme větu o aritmetice limit a VOLSF:

$$= \lim_{y\to 0} \frac{(-1)^m \frac{\sin my}{my}}{(-1)^n \frac{\sin ny}{ny}} \cdot \frac{m}{n} = (-1)^{m-n}\frac{m}{n}.$$

(u) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\text{arctan } x}{\text{arccot } x}$

**Řešení:** $\lim_{x\to\infty} \text{arctan} = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\infty} \text{arccot} = 0+$. Pak

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{arctan } x}{\text{arccot } x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0+} = \infty.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\arctan(\arcsin x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{\arcsin x}{\arctan(\arcsin x)} \cdot \frac{x}{\arcsin x}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

2x VOLSF

$$f(y) = \frac{\sin y}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1 \qquad g(x) = \tan x \xrightarrow{x\to 0} 0$$

(P) $\tan x \neq 0$ na $\frac{\pi}{4}$ - prstencovém okolí 0

$$f(y) = \frac{y}{\arctan y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1 \qquad g(x) = \arcsin x \xrightarrow{x\to 0} 0$$

(P) $\arcsin x \neq 0$ na $P_{\frac{\pi}{4}}$ -okolí 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{(\arctan x)^2} \cdot \frac{\arctan^2 x}{x^2} \overset{\text{VOAL}}{=} \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

VOLSF $\quad f(y) = \dfrac{1 - \cos y}{y^2} \xrightarrow[y \to 0]{} 1$ $\qquad$ (P) $\arctan x \neq 0$

$\qquad$ na $P_{20}(0)$

$g(x) = \arctan x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$$\lim_{x \to \infty} x^{5/2} \arcsin\left(\sqrt{x^5+1} - \sqrt{x^5-1}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^5+1} - \sqrt{x^5-1}}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}} \cdot \left(\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}} \overset{\text{VOAL}}{=} 0$$

pak $$\lim_{x\to\infty} \underbrace{x^{5/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}}}_{\to 1} \cdot \frac{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}}\right)}{\underbrace{\frac{2}{\sqrt{x^5+1} + \sqrt{x^5-1}}}_{\to 1}}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} 1 \cdot 1$$

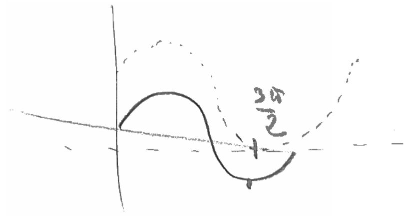
- protože: $$\lim \frac{x^{5/2}}{x^{5/2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+1/x^5} + \sqrt{1-1/x^5}} \overset{\text{VOAL}}{=} \frac{2}{2} = 1$$

vnější funkce $f(y) = \sqrt{y}$, spoj v 1, vnitřní $g(x) = 1 \pm \frac{1}{x^5} \underset{x \to 0}{\to} 1$

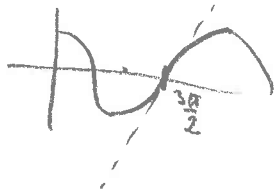
- známá lim $\lim_{y\to 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1$, $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x^5+1}+\sqrt{x^5-1}} \to 0$ pro $x \to \infty$

$g(x) \neq 0$ na okolí $\infty$.

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2)\,\frac{\cos x}{1+\sin x}$$




$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} \underbrace{\frac{\cos x}{x - \frac{3\pi}{2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2}{1+\sin x}}_{\to 2}$$




$$\cdot \underbrace{\frac{4x^2 - 9\pi^2}{\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}}_{\to 12\pi} \overset{\text{VOAL}}{=} \underline{24\pi}$$

$$(4x^2 - 9\pi^2) = (2x - 3\pi)(2x + 3\pi)$$

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} \frac{4x^2 - 9\pi^2}{x - \frac{3}{2}\pi} = \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} (2x + 3\pi) \cdot 2 = 12\pi$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan\left(\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}\right)}{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}}$$

$$\left(\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2-\cos^2 x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+\sin^2 x} + \sqrt{x^2-\cos^2 x}}{\sqrt{x^2+\sin^2 x} + \sqrt{x^2-\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x} + \sqrt{x^2-\cos^2 x}}$$

$$\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x} + \sqrt{x^2-\cos^2 x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x} + \sqrt{x^2-\cos^2 x}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x} + \sqrt{x^2-\cos^2 x}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}}} \overset{VOAL}{=} 1$$

$1 \swarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{\cos^2 x}{x^2}}} \overset{VOAL}{=} \underline{1}$$

VOLSF: $f(y) = \frac{\arctan y}{y} \xrightarrow{y\to 0} 1$ $\quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+\sin^2 x} + \sqrt{x^2-\cos^2 x}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$

(P)

VOLSF $f(y) = \sqrt{y} \underset{y\to\infty}{\to} \infty$ $\quad g(x) = x^2+\sin^2 x \geq x^2$

$g(x) = x^2-\cos^2 x \geq x^2-1 \quad \to \infty$

(P) 2 policajti

$g(x) = x^2+2 \quad (x^2+1) \to \infty$