Tento vztah nám ukazuje, že čitatel zlomku (samozřejmě druhým zlomkem počínaje) se zkrátí se jmenovatelem zlomku následujícího (pokud za ním ovšem ten následující je). Uvažovaný výraz se pak podstatně zjednoduší a bude mít tvar

$$\frac{1\cdot 2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{2^2-2+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\,.$$

Takto dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n}=\frac{2}{3}\,.$$

▲

Příklad 1.12. Určete $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$.

Řešení. Zde můžeme být na značných rozpacích, jak postupovat. Ale v čitateli je mnohočlen a mnohočleny často umíme rozložit. Jistě by bylo příjemné, kdyby se některý činitel v rozkladu mnohočlenu $k^3+6k^2+11k+5$ zkrátil proti $(k+1)!$. Zkusíme tedy např. zda $k+1$ nedělí uvažovaný mnohočlen. Bohužel však zjistíme, že v bodě $k=-1$ má mnohočlen hodnotu -1. Tedy $k+1$ náš mnohočlen nedělí, ale z našeho výsledku plyne, že $k+1$ dělí mnohočlen $(k^3+6k^2+11k+5)+1$. Odtud je pak již jen krůček ke zjištění, že

$$k^3+6k^2+11k+5=(k+1)(k+2)(k+3)-1\,.$$

S použitím tohoto výsledku dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)-1}{(k+3)!}=\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+3)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k!}=\\&=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\,.\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}&=\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\right)=\\&=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=\frac{5}{3}\,.\end{aligned}$$

▲

1a **Příklad 1.13.** Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána předpisem $a_1=0$, $a_n=\dfrac{a_{n-1}+3}{4}$ pro $n\geq 2$. Určete $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$.

Řešení. V tomto příkladě je posloupnost definována pomocí rekurentní formule. Vypočteme-li první tři členy, zjistíme, že

$$a_1=0<a_2=\frac{3}{4}<a_3=\frac{15}{16}\,.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, alespoň na svém začátku, působí dojmem, že by mohla být rostoucí a shora omezená číslem 1. Zkusme tedy tato tvrzení dokázat. Zřejmě $a_1<a_2$. Předpokládejme tedy, že $a_k<a_{k+1}$ pro

všechna $k = 1, 2, \dots n - 1$. Upravujeme-li nerovnost, jejíž platnost ovšem chceme teprve dokázat, dostáváme

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1}, \\ \frac{a_{n-1}+3}{4} &< \frac{a_n+3}{4}, \\ a_{n-1}+3 &< a_n+3, \\ a_{n-1} &< a_n, \end{aligned}$$

přičemž poslední nerovnost podle indukčního předpokladu platí. Předchozí postup ovšem nemůžeme považovat za důkaz, spíše za návod k důkazu. Formální důkaz by postupoval přesně opačným směrem. Podle indukčního předpokladu platí $a_{n-1} < a_n$. Odtud úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} a_{n-1}+3 &< a_n+3, \\ \frac{a_{n-1}+3}{4} &< \frac{a_n+3}{4}, \\ a_n &< a_{n+1}. \end{aligned}$$

Tím je tedy dokázáno, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí. Ukážeme nyní, že $a_n < 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě $a_1 < 1$. Předpokládejme, že $a_k < 1$ pro $k = 1, 2, \dots, n-1$. Potom

$$a_n = \frac{a_{n-1}+3}{4} < \frac{1+3}{4} = 1,$$

čímž je omezenost posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dokázána. Podle Věty 1.9 má tedy posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu. Označíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. V rovnosti $a_n = \frac{a_{n-1}+3}{4}$ pišme $n+1$ místo n. Dostáváme rovnost

$$a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4},$$

která platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Přechodem k limitě na obou stranách této rovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+3}{4}, \\ a &= \frac{1}{4}(\lim_{n\to\infty} a_n + 3), \\ a &= \frac{1}{4}(a+3), \\ &\boxed{a = 1.} \end{aligned}$$

Připomeňme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ na základě Věty 1.12, protože posloupnost $\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ukázali jsme tedy, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Ukažme si ale ještě, než ukončíme tento příklad, jak jinak můžeme dospět k přesvědčení, že číslo 1 by mohlo být horní hranicí posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Postup, který ukážeme, se nám může hodit i leckdy jindy. K přesvědčení, že $a_n < 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsme původně dospěli odhadem. Pak jsme ovšem tuto nerovnost dokázali. Můžeme však postupovat i takto: Chceme-li dokázat, že $a_n < c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (c ovšem zatím neznáme), bylo by dobré, kdybychom byli schopni dokázat, že $a_n < c$ implikuje $a_{n+1} < c$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4} < \frac{c+3}{4}.$$

Kdyby nyní platilo $\frac{c+3}{4} = c$, byl by náš důkaz hotov. Z této rovnice ale ihned dostáváme $c = 1$.

Můžeme ale nabídnout ještě další postup pro určení kandidáta na horní hranici posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. V okamžiku, kdy už víme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, můžeme uvažovat následujícím způsobem: Horní hranicí rostoucí konvergentní posloupnosti je její limita. Má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu, označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Přechodem k limitě v rovnosti $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4}$ úplně stejně jako výše zjistíme, že $a = 1$. Takže, má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vůbec horní hranici, potom číslo $a = 1$ je její horní hranicí. ▲

1c

Příklad 1.14. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána předpisem $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(a_n + \dfrac{1}{a_n}\Big)$. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Jedná se opět o posloupnost definovanou rekurentně, takže zkusíme stejný postup jako v Příkladě 1.13. Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vůbec monotonní, zjistíme téměř jistě druh monotonnosti srovnáním prvních dvou členů a_1 a $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{1}{a_1})$. (Nic nezjistíme pouze v případě $a_1 = a_2$.) Vyšetřujme tedy např. nerovnost

$$\begin{aligned} a_1 &< a_2, & a_1 &< \frac{1}{a_1}, \\ a_1 &< \frac{1}{2}\Big(a_1 + \frac{1}{a_1}\Big), & a_1^2 &< 1, \\ 2a_1 &< a_1 + \frac{1}{a_1}, & a_1 &< 1. \end{aligned}$$

Zdá se tedy, že pro $a_1 < 1$ by naše posloupnost mohla být neklesající a pro $a_1 > 1$ nerostoucí. Každopádně je ale jasné, že pro $a_1 = 1$ je konstantní, přesněji $a_n = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Předchozí domněnka o monotonnosti je však velký omyl, který nám ukazuje, jak opatrní při matematických soudech musíme být. Jak ale zjistíme, že se jedná o omyl, a jak nalezneme správnou odpověď? Pokračujeme-li v našich předchozích úvahách, je přirozené snažit se v případě $a_1 < 1$ dokázat, že naše posloupnost je neklesající. Vyšetřujme proto nerovnost $a_n \le a_{n+1}$:

$$\begin{aligned} a_n &\le a_{n+1}, \\ a_n &\le \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{1}{a_n}\Big), \\ a_n &\le \frac{1}{a_n}, \\ a_n &\le 1. \end{aligned}$$

(Při násobení číslem a_n nedojde k obrácení nerovnosti, neboť jak se snadno dokáže indukcí $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s kladnými členy.) Jistě by tedy bylo dobré dokázat, že $a_n \le 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro $n \ge 2$ zde dostáváme

$$\begin{aligned} a_n &\le 1, \\ \frac{1}{2}\Big(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\Big) &\le 1, \\ a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} &\le 2, \\ a_{n-1}^2 + 1 &\le 2a_{n-1}, \\ (a_{n-1} - 1)^2 &\le 0, \end{aligned}$$

odkud ihned vidíme, že $a_n \leq 1$ neplatí ani pro $n = 2$. Navíc opakováním předchozího postupu snadno zjistíme, že pro libovolné $n \geq 2$ platí dokonce obrácená nerovnost $a_n \geq 1$. Přitom ale klidně může být $a_1 < 1$. To ale znamená, že neplatí $a_n \leq a_{n+1}$, ale naopak že platí $a_n \geq a_{n+1}$, ovšem pouze pro $n \geq 2$. Naše posloupnost tedy je, od druhého členu počínaje, vždy nerostoucí, bez ohledu na velikost kladného čísla a_1. Existuje tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. (Čtenář nechť si rozmyslí, že posloupnost, která je monotonní až od určitého členu, musí mít nutně limitu zrovna tak jako posloupnost monotonní. Snadno to dokážeme např. užitím Vět 1.9 a 1.11.) Vzhledem k tomu, že $a_n \geq 1$ pro $n \geq 2$, je tato limita vlastní a různá od nuly. Označíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Přechodem k limitě v rovnosti $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$ dostáváme

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right), \\ a &= \frac{1}{a}, \\ a &= 1. \end{aligned}$$

Ukázali jsme tedy, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Na této úloze stojí za povšimnutí následující skutečnost: Celá posloupnost je určena jejím prvním členem a_1. Změníme-li její první člen (s výjimkou případu $a_1' = \frac{1}{a_1}$), změní se všechny její členy. Přitom ale ke změně limity nedojde. ▲

Příklad 1.15. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ buď dána předpisem $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n(a_n^2 + 3c)}{3a_n^2 + c}$ ($c \geq 0$ je pevné). Určete $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Řešení. Je to opět posloupnost zadaná rekurentně, takže by to pro nás mohla být rutinní úloha. Prozkoumejme třeba nerovnost $a_n \leq a_{n+1}$:

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1}, \\ a_n &\leq \frac{a_n(a_n^2 + 3c)}{3a_n^2 + c}, \\ 3a_n^2 + c &\leq a_n^2 + 3c, \\ a_n &\leq \sqrt{c}. \end{aligned}$$

(Úpravy jsou zcela v pořádku, neboť jak se snadno dokáže indukcí, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s kladnými členy.) Podstatný je tedy vztah členů posloupnosti k číslu $\sqrt{c}$. O členu a_1 nevíme nic. Uvažme tedy nejprve případ $a_1 \leq \sqrt{c}$ a zkusme zjistit, zda potom platí $a_n \leq \sqrt{c}$ pro všechna $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n &\leq \sqrt{c}, \\ \frac{a_{n-1}(a_{n-1}^2 + 3c)}{3a_{n-1}^2 + c} &\leq \sqrt{c}, \\ a_{n-1}^3 + 3a_{n-1}c &\leq 3a_{n-1}^2\sqrt{c} + c\sqrt{c}, \\ a_{n-1}^3 - 3a_{n-1}^2\sqrt{c} + 3a_{n-1}(\sqrt{c})^2 - (\sqrt{c})^3 &\leq 0, \\ (a_{n-1} - \sqrt{c})^3 &\leq 0, \\ a_{n-1} - \sqrt{c} &\leq 0, \\ a_{n-1} &\leq \sqrt{c}. \end{aligned}$$

7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti

(1b)

(a) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$

Řešení: Pro n-tý člen máme vzorec

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}}.$$

Posloupnost x_n je zřejmě ostře rostoucí, neboť nerovnost $x_{n+1} > x_n$ se lehce ověří (např. umocněním). Dokážeme, že $x_n \leq 2$ pro libovolné n; umocňováním na druhou totiž postupně dostáváme

$$x_n \leq 2 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq 2.$$

Protože posloupnost je monotónní a omezená, konverguje, tj. má vlastní limitu L. Tuto limitu lze nyní navíc snadno spočítat, neboť

$$\lim x_{n+1} = \lim \sqrt{2 + x_n}$$

$$L = \sqrt{2 + L}$$

$$\boxed{L = 2.}$$

(1c)

(b)

$$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right).$$

Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Řešení: Ukážeme, že posloupnost je omezená a monotónní, tedy konvergentní. Označíme-li potom její limitu L, potom musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$$

(1b)

$$x_n \overset{?}{\leq} \sqrt{2+x_n}$$

$$x_n^2 \leq 2+x_n$$

$$(x_n^2 - x_n) \leq 2$$

$$\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 2$$

$$\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$x_n^2 - x_n - 2 \overset{?}{\leq} 0$$

$$x_n = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x_n = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$x_{n+1} \overset{?}{\leq} 2$ kdyz $x_n \leq 2$

$\sqrt{2+x_n} \overset{?}{\leq} 2$ ano

(1e)

$$L = \lim \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right)$$

odkud plyne, že

$$L = \lim \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right) \Leftrightarrow L = \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = 1.$$

Zřejmě tedy limitou, pokud je posloupnost konvergentní, může být pouze číslo -1 nebo $+1$. Protože $x_0 > 0$, jsou všechny členy posloupnosti nezáporné (díky rekurentnímu vzorci), a tedy minus jednička nepřichází v úvahu.

Zbývá dokázat konvergenci, tj. monotonii a omezenost. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (AG-nerovnost) vyplývá, že pro libovolné $a > 0$ je

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1,$$

a tedy platí, že libovolný člen posloupnosti s výjimkou x_0 je větší než 1.

$$\boxed{x_{n+1} - x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - x_n^2}{x_n}\right) \leq 0.$$

Odtud plyne, že posloupnost je klesající (přičemž ostře, pokud $0 < x_0 \neq 1$, neboť v AG-nerovnosti nastává rovnost pouze tehdy, dělá-li se průměr stejných čísel). Z toho, že posloupnost je od druhého členu klesající plyne, že je omezená, neboť platí, že

$$0 < x_n \leq \max\{x_0, x_1\}.$$

(c) Nechť $0 \leq a \leq 1$. Vypočtěte limitu posloupnosti definované rekurentně vztahy

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2).$$

Řešení: Pokud $a = 0$, pak je posloupnost identicky nulová a vše je jasné. Nechť tedy $a \neq 0$ a nechť $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Tato nerovnost jistě platí pro x_1. Pak $x_n = \sqrt{a} - \varepsilon$, kde $\varepsilon \leq \sqrt{a}$ a protože platí, že $\sqrt{a} \leq 1$, je také $\varepsilon \geq \sqrt{a}\varepsilon$, a proto

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(a - (\sqrt{a} - \varepsilon)^2) = \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(2\varepsilon\sqrt{a} - \varepsilon^2) \\ &= \sqrt{a} + (\sqrt{a}\varepsilon - \varepsilon) - \varepsilon^2 \leq \sqrt{a} - \varepsilon^2 < \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Přitom evidentně $x_{n+1} \geq 0$, protože pro $x_n < \sqrt{a}$ je přírůstek $\frac{1}{2}(a - x_n^2)$ kladné číslo. Indukcí jsme tak dokázali, že pokud $x_n < \sqrt{a}$, potom také $x_{n+1} < \sqrt{a}$.

(2)

	inf	sup
(a)	1	∞
(b)	0	2
(c)	0	1
(d)	2	∞
(e)	$-\infty$	∞
(f)	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
(g)	0	1
(h)	0	1
(i)	-1	1
(j)	$-\infty$	∞

(5) $(0;1)$

(~~5~~) další papír

(6) ~~(a)~~ negace

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :$$

$$|(-1)^n - A| \geq \varepsilon$$

důkaz: fixujme $A \in \mathbb{R}$, zvolme $\varepsilon = \frac{1}{4}$, fixujme n_0. zvolme n buď n_0 nebo n_0+1, i jedna z těchto voleb je správná. kdyby ne, tak

$$|1-A| < \tfrac{1}{4} \quad \& \quad |-1-A| < \tfrac{1}{4}$$

což je spor.

(3)(a)

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sin n\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Hrom. body: $\left\{-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\}$

limsup 1

liminf -1

(3)(b) $$\lim_{n\to\infty} 3\left(1-\frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$$

liminf

n liché: $3-\frac{3}{n}-2 = 1-\frac{3}{n} \to 1$

n sudé: $3-\frac{3}{n}+2 = 5-\frac{3}{n} \to 5$

limsup

(3)(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n+n\sin 2n}{n\cos 3n + (2n+\sin 4n)^2}$$

$$= \lim \frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{2+\frac{2}{n}+\frac{\sin 2n}{n} \xrightarrow{} \text{2 policajti}}{\frac{\cos 3n}{n}+4+\frac{\sin^2 4n}{n^2}+\frac{4\sin 4n}{n}}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} \frac{2+0+0}{0+4+0+0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} = \lim = \limsup = \liminf$$

(3)(h) $$\lim_{n\to\infty} (\cos \pi n)^n \cdot n$$

n liché: $(-1)\cdot n$

sudé $1\cdot n$

$\limsup = \infty$

$\liminf = -\infty$

6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. Najděte lim sup a lim inf posloupností

(a)

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

Řešení: Protože posloupnost je konvergentní, platí, že

$$\limsup x_n = \liminf x_n = \lim x_n = 1.$$

(3d) (b)

$$x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$$

Řešení: Posloupnost není konvergentní. Je ale lehké ukázat, že má jen dva hromadné body, a to limity vybraných podposloupností $x_{2n} = (2 + \frac{3}{n})$ a $x_{2n+1} = -(2 + \frac{3}{n})$. Proto

$$\limsup x_n = 2, \qquad \liminf x_n = -2.$$

(3e) (c)

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

Řešení: Je lehké ukázat, že posloupnost má jen dva hromadné body, a to limity vybraných podposloupností $x_{2n} = \frac{1}{n} + 1$ a $x_{2n+1} = \frac{1}{n}$. Proto

$$\limsup x_n = 1, \qquad \liminf x_n = 0.$$

(3f) (d)

$$x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$$

Řešení: Protože $\cos\frac{n\pi}{2}$ nabývá popořadě hodnot $0, -1, 0, 1$, jsou ~~nenulové~~ nekonstantní pouze sudé členy posloupnosti. Ty jsou rovny

$$x_{2n} = 1 - \frac{2n}{2n+1} \to 0, \qquad x_{4n} = 1 + \frac{4n}{4n+1} \to 2.$$

Liché členy posloupnosti jsou ~~nulové~~ $= 1$. Hromadné body posloupnosti jsou tedy nula, jedna a dva, proto

$$\limsup x_n = 2, \qquad \liminf x_n = 0.$$

(3g) (e)

$$x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Řešení: Člen $n(n-1)/2$ je sudý pro $n = 4k$ a $n = 4k+1$, naopak pro $n = 4k+2$ a $n = 4k+3$ je lichý. Posloupnost x_n tedy tvoří čtyři konstantní podposloupnosti:

$$x_{4n} = 1{+}2{+}3 = 6, \quad x_{4n+1} = 1{-}2{+}3 = 2, \quad x_{4n+2} = 1{+}2{-}3 = 0, \quad x_{4n+3} = 1{-}2{-}3 = -4.$$

Z toho plyne, že $\limsup x_n = \sup x_n = 6$ a $\liminf x_n = \inf x_n = -4$.

(f)

$$x_n = (-1)^n n$$

Řešení: Podposloupnosti $x_{2n} = 2n$ a $x_{2n+1} = -2n-1$ rostou do $+\infty$, resp. klesají do $-\infty$. Tím je vše jasné a je

$$\limsup x_n = \sup x_n = +\infty, \qquad \liminf x_n = \inf x_n = -\infty.$$

(3i) (g)

$$x_n = -n[2 + (-1)^n]$$

Řešení: Posloupnost je konvergentní, protože $-n[2+(-1)^n] \leq -n \to -\infty$. Proto

$$\limsup x_n = \liminf x_n = \inf x_n = -\infty.$$

2. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti

   (a) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$
   Řešení: Pro n-tý člen máme vzorec

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}}.$$

Posloupnost x_n je zřejmě ostře rostoucí, neboť nerovnost $x_{n+1} > x_n$ se lehce ověří (např. umocněním). Dokážeme, že $x_n \leq 2$ pro libovolné n; umocňováním na druhou totiž postupně dostáváme

$$x_n \leq 2 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq 2.$$

(3)(j) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2}$

n liché $\quad \frac{-2n}{n+1} + \sqrt[n]{2} \to -2+1 = -1 \quad = \liminf$

n sudé $\quad \frac{2n}{n+1} + \sqrt[n]{2} \to 2+1 \quad = 3 \quad = \limsup$

Tím jsme indukcí dokázali, že posloupnost je omezená a že pro každé n přirozené platí, že $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Z toho plyne, že posloupnost x_n je rostoucí, protože

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(a - x_n^2) > 0.$$

Z toho plyne, že posloupnost je konvergentní a existuje vlastní limita $\lim x_n = L$. Z toho plyne, že musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim(x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2)) \Leftrightarrow L = L + \frac{1}{2}(a - L^2) \Leftrightarrow L^2 = a \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{a}.$$

Protože ale všechny členy posloupnosti jsou kladné, připadá v úvahu pouze $L = \sqrt{a}$. Snadno se ověří, že výsledek platí i pro speciální případ $a = 0$.

4 (a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Řešení:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

Z Věty o limitě vybrané posloupnosti máme, že

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e,$$

tedy lze nalézt n tak, že

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < 10.$$

Zároveň zjevně

$$1 < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

n-tá odmocnina tuto nerovnost nepokazí (promyslete) a tak můžeme odhadovat

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \lim_{n\to\infty} \leq \sqrt[n]{10} = 1,$$

takže z Věty o dvou policajtech máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = 1.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$$

Řešení:
Použijeme větu o součinu omezené a mizející posloupnosti, $1 \geq \sin n \leq 1$, $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}$$

Řešení: Tato posloupnost limitu nemá, neb členy začnou být záhy záporné pod odmocninou a tedy nejsou definované.

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n+1}{n^\alpha}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$
Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n+1}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^\alpha} \frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1} = \begin{cases} 1, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha > 3 \\ \infty, & \alpha < 3 \end{cases}$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+(3n+2)^4}{n^\alpha+n^4}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$
Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+(3n+2)^4}{n^\alpha+n^4} = \lim_{n\to\infty} 3^4 n^4 \frac{(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^2+(1+\frac{2}{3n})^4}{n^\alpha+n^4} = \begin{cases} 81/2, & \alpha = 4 \\ 0, & \alpha > 4 \\ 81, & \alpha < 4 \end{cases}$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^4-(n^2+1)^2}{n^\alpha+n^2}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$ **Řešení:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^4-(n^2+1)^2}{n^\alpha+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^4-2\cdot 4n^3+\cdots+2^4)^4-(n^4+2n^2+1)}{n^\alpha+n^2}$$
$$= \begin{cases} -8, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha > 3 \\ -\infty, & \alpha < 3 \end{cases}$$

(g)

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}\right),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$

Řešení: Odstraněním odmocniny z čitatele pomocí vhodného rozšíření (viz jmenovatel následujícího zlomku) máme

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n^\alpha \frac{(n^2+1)-(n^2-1)}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{(n^2-1)^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^\alpha}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{(n^2-1)^2}}
\end{aligned}$$

a vytknutím $n^{4/3}$ ze jmenovatele dostaneme

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4/3} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2} + \sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2} + \sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}}$$

a) Pro $\alpha = 4/3$ vyjde

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2} + \sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2} + \sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

b) Pro $\alpha > 4/3$ vyjde

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4/3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2} + \sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2} + \sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}} \\
&= (+\infty)\cdot\frac{2}{3} = +\infty
\end{aligned}$$

c) Pro $\alpha < 4/3$ vyjde

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4/3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2} + \sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2} + \sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}} \\
&= 0\cdot\frac{2}{3} = 0.
\end{aligned}$$

(h) Určete $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3-n} - an - b) = 0$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3-n} - an - b) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n-(an+b)^3}{(n^3-n)^{2/3} + (n^3-n)^{1/3}(an+b) + (an+b)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n-(a^3n^3+3a^2n^2b+3anb^2+b^3)}{(n^3-n)^{2/3} + (n^3-n)^{1/3}(an+b) + (an+b)^2}
\end{aligned}$$

Vedoucí člen ve jmenovateli je n^2, v čitateli $n^3(1-a^3)$. Aby byla limita vlastní, musí být $a=1$. Pak v čitateli zbývá $3a^2n^2b$, což též musí zmizet, jinak by limita byla >0. Tedy $b=0$.

(i) Určete $\alpha > 0$ tak, aby následující limita byla vlastní

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha+1)^3+\alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1}-n)}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha+1)^3+\alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1}-n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha+1)^3+\alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1}-n)} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{3\alpha} \frac{(1+\frac{1}{n^\alpha})^3+\frac{\alpha(-1)^n}{n^{3\alpha}}}{n^2} \cdot n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{3\alpha-1}\left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^3+\frac{\alpha(-1)^n}{n^{3\alpha}}\right]\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right) \\
&= \begin{cases} 2, & \alpha = 1/3 \\ \infty, & \alpha > 1/3 \\ 0, & \alpha < 1/3 \end{cases}
\end{aligned}$$

(j)

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2-n}-2n)$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2-n}-2n) &= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2-n}-2n)\cdot\frac{\sqrt{4n^2-n}+2n}{\sqrt{4n^2-n}+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{4n^2-n}+2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n}\frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(k)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)+1}{(n+2)-1} = 1.$$

(1)

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin n\pi)$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin n\pi) \overset{VOAL}{=} 1+\lim_{n\to\infty}\sin n\pi = 1+0 = 1.$$

~~(6)~~(b) negace $\exists k \in \mathbb{N} \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : (-1)^n n < k$

Dk: zvolme k lib., třeba $k = 128$, fixujme n_0.

Zvolme $n \geq n_0$ lib, liché, pak

$$-1 \cdot n < k \quad , \text{neb } k \in \mathbb{N}.$$

6 (a) $\sup A \cup B = \max \{\sup A, \sup B\}$

$\inf A \cup B = \min \{\inf A, \inf B\}$

(b) $\sup A \cap B \leq \min \{\sup A, \sup B\}$

$\inf A \cap B \geq \max \{\inf A, \inf B\}$

(c) $\sup A \setminus B \leq \sup A$

$\inf A \setminus B \geq \inf A$

(d) $\sup A \triangle B \leq \max \{\sup A, \sup B\}$

$\inf A \triangle B \geq \min \{\inf A, \inf B\}$

(e) $\sup(-A) = -\inf A$

$\inf(-A) = -\sup A$

(f) $\sup A+B = \sup A + \sup B$

$\inf A+B = \inf A + \inf B$

(g) $\sup A-B = \sup A - \inf B$

$\inf A-B = \inf A - \sup B$

(h) $\sup A \cdot B = \max \{\sup A \cdot \sup B, \sup A \cdot \inf B, \inf_A \cdot \sup B, \inf_A \cdot \inf_B\}$

$\inf A \cdot B = \min \{ \quad - \text{"} - \quad \}$

(7) (a) $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$

pak $a_i = m_{i \bmod k+1}$

(b) $a_n = \langle 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$

(c) Nechť a_n je taková, že mna jejích hr. bodů je rovna $\mathbb{N}$.

pak lze vybrat podposloupnost takové, že

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & \to 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & \to 2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots & \to 3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ldots & \to 4 \end{array}$$

vybereme diagonálně $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} \ldots$

tato posloupnost jde do ∞, což je spor.