3. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $s \in \mathbb{R}$ splňující

- $\forall x \in M \colon x \leq s$,
- $\forall s' \in \mathbb{R}, s' < s\, \exists x \in M \colon x > s'$,

nazýváme *supremem* množiny M.

Definice 2. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup a_n := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora omezená} \\ \infty, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora neomezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme *limes superior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Obdobně definujeme *limes inferior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ předpisem

$$\liminf a_n := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola omezená} \\ -\infty, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola neomezená.} \end{cases}$$

Definice 3. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak $A \in \mathbb{R}^*$ nazveme *hromadnou hodnotou* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 4. Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel. Pak existuje $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Věta 5 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Rekurentní posloupnosti

1. Ověříme, že je posloupnost dobře zadaná (nedělíme 0, pod odmocninou není záporné číslo ...).
2. Ukážeme, že je posloupnost monotónní (= (ne)klesající nebo (ne)rostoucí). Obvykle indukcí řešíme zda $a_n \leq a_{n+1}$ (nebo $a_n \geq a_{n+1}$) či $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$ (nebo $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$).
3. Ukážeme, že posloupnost je omezená.
4. Spočteme limitu pomocí věty o limitě vybrané posloupnosti.

Hinty

AG nerovnost: pro $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ platí
$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

Příklady

1. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti
   (a) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4}$
   (b) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$
   (c) $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right)$. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
2. Najděte suprema a infima následujících množin v $\mathbb{R}$:
   (a) $\mathbb{N}$
   (b) $(0; 2]$
   (c) $(0; 1) \cap \mathbb{Q}$
   (d) $\{x \in \mathbb{Z}; x \geq -\sqrt{6}\}$
   (e) $\{(-1)^n\sqrt{n}; n \in \mathbb{N}\}$
   (f) $\{\arctan x; x \in \mathbb{R}\}$
   (g) $\left\{1 - \dfrac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$
   (h) $\left\{\dfrac{1 + (-1)^n}{2}; n \in \mathbb{N}\right\}$
   (i) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{2}; n \in \mathbb{N}\right\}$
   (j) $\{(-1)^n n; n \in \mathbb{N}\}$
3. Spočtěte limitu, neexistuje-li, najděte limes superior a inferior a hromadné body
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} 3\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + 2n + n\sin 2n}{n\cos 3n + (2n + \sin 4n)^2}$
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$
   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$
   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$
   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 2(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$
   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos \pi n)n$
   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} -n[2 + (-1)^n]$
   (j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2}$

Opakování

4. Spočtěte limity
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n}}$
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + n + 1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2+(3n+2)^4}{n^\alpha+n^4}$, $\alpha\in\mathbb{N}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-2)^4-(n^2+1)^2}{n^\alpha+n^2}$, $\alpha\in\mathbb{N}$

(g) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right)$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$

(h) Určete $a,b\in\mathbb{R}$ tak, aby $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3-n}-an-b)=0$

(i) Určete $\alpha>0$ tak, aby následující limita byla vlastní $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^\alpha+1)^3+\alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1}-n)}$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-n}-2n)$

(k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

(l) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin n\pi)$

Bonus

5. Uveďte příklad množiny, která má supremum, ale nemá maximum. Uveďte příklad množiny, která má infimum, ale nemá minimum.

6. Nechť $A,B\subset\mathbb{R}$. Co lze říci o supremu a infimu následujících množin ve vztahu k $\sup A$, $\sup B$ a $\inf A$, $\inf B$?

   (a) $A\cup B$

   (b) $A\cap B$

   (c) $A\setminus B$

   (d) $A\triangle B$

   (e) $-A=\{a,a\in A\}$

   (f) $A+B=\{a+b,a\in A,b\in B\}$

   (g) $A-B=\{a-b,a\in A,b\in B\}$

   (h) $A\cdot B=\{a\cdot b,a\in A,b\in B\}$

7. (a) Nechť M je konečná množina přirozených čísel. Najděte posloupnost a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna M.

   (b) Najděte posl. a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna $\mathbb{N}\cup\infty$.

   (c) Ukažte, že nelze najít takovou posloupnost, aby množina jejích hromadných bodů byla rovna $\mathbb{N}$.

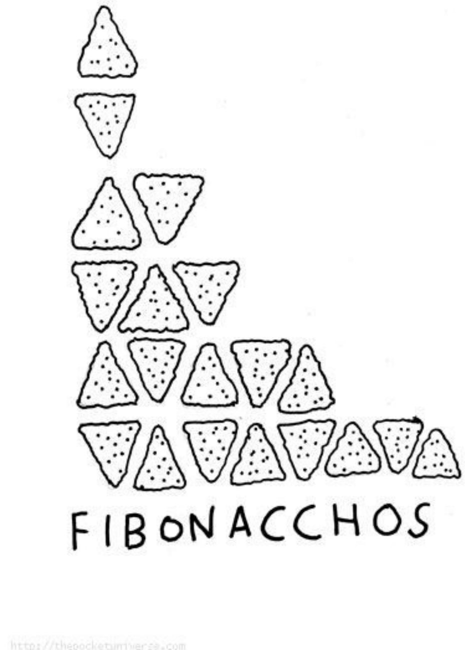

Figure 1: https://www.pinterest.com/pin/364369426094614677/