2. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$$

Řešení: Vhodným vytknutím plyne

$$\lim \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \lim \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0+1}{0+1} = \frac{1}{3}.$$

(b)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{5,0001^n}$$

Řešení: Mohli bychom postupovat vytknutím, ale zde to jde jednodušeji. Limitu roztrhneme pomocí věty o aritmetice limit na pět kusů.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{5,0001^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5,0001}\right)^n + \left(\frac{2}{5,0001}\right)^n +$$

$$+ \left(\frac{3}{5,0001}\right)^n + \left(\frac{4}{5,0001}\right)^n + \left(\frac{5}{5,0001}\right)^n = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0,$$

neboť v každé závorce je koeficient ostře menší než jedna.

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}$$

Řešení: Nejrychleji ze členů ve zlomku roste faktoriál. Proto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n(n!)} \frac{\frac{3^n}{n!} + \frac{n^5}{n!} + 1}{\frac{n^6}{n!} + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \frac{\frac{3^n}{n!} + \frac{n^5}{n!} + 1}{\frac{n^6}{n!} + 1}$$

$$= 1 \cdot \frac{0+0+1}{0+1} = 1.$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + n^3 + \frac{1}{n} + e^n + 5^n}{\ln_{10} n + n^4 + 5^n + n^3 + 4^n}$$

Řešení: Vytkneme nejrychleji rostoucí člen 5^n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n} \frac{\frac{\ln n}{5^n} + \frac{n^3}{5^n} + \frac{\frac{1}{n}}{5^n} + \frac{e^n}{5^n} + \frac{5^n}{5^n}}{\frac{\ln_{10} n}{5^n} + \frac{n^4}{5^n} + \frac{5^n}{5^n} + \frac{n^3}{5^n} + \frac{4^n}{5^n}} \overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{0+0+0+0+1}{0+0+1+0+0} = 1$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$$

Řešení: Vytkneme $(n+1)!$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)+1}{n+2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{1+3/n}{1+1/n} \overset{VOAL}{=} 1$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$$

Řešení: Použijeme třetí větu a budeme zjišťovat $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, tedy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + 2^{n+1} + 3^{n+1}}{n^2 + 2^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} + (\frac{2}{3})^{n+1} + 1}{\frac{n^2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3}(\frac{2}{3}^n) + \frac{1}{3}} = \frac{0+0+1}{0+\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}} = 3$$

(g)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n},$$

kde $a, b, c > 0$

Řešení: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \geq b \geq c$. Potom platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \lim_{n\to+\infty} a \cdot \sqrt[n]{1 + (b/a)^n + (c/a)^n} = a$$

podle věty o dvou policajtech, neboť $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1 + (b/a)^n + (c/a)^n} \leq \sqrt[n]{3}$.

(h)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right)$$

pro $a > b > 0$

Řešení: Vytkněme a^n v čitateli a a^{2n} ve jmenovateli. Je $\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{a^2} \left(\frac{\sqrt[n]{1 + (b/a)^n}}{\sqrt[n]{1 + (b/a)^{2n}}} \right) = \frac{1}{a},$$

neboť $0 < b/a < 1$, a tudíž je $\sqrt[n]{\frac{1+(b/a)^n}{1+(b/a)^{2n}}} \leq \sqrt[n]{\frac{1+1}{1}} = \sqrt[n]{2}$, a tedy limita členu v závorce je podle věty o dvou policajtech rovna jedné.

(i)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2-(n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3-n^3-3n^2)^{n-1}}}$$

Řešení: Upravíme:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2-(n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3-n^3-3n^2)^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n^2+4n+4-(n^2+2n+1))^{n+1}}{(n^3+3n^2+3n+3-n^3-3n^2)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+3)^{n+1}}{(3n+3)^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}n^{n+1}(1+3/2n)^{n+1}}{3^{n-1}n^{n-1}(1+1/n)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{n^{n+1}}{n^{n-1}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{(1+3/2n)^{n+1}}{(1+1/n)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6\cdot 2^n}{3^n}} \cdot \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{\frac{(1+3/2n)^{n+1}}{(1+1/n)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot \sqrt[n]{n^2}\cdot \sqrt[n]{(1+3/2n)(1+1/n)}\cdot\frac{1+3/2n}{1+1/n} = 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1+0}{1+0} = \frac{2}{3}.$$

Platí totiž pro každé $a > 0$, k přirozené :

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1, \qquad \lim \sqrt[n]{n} = 1 \implies \lim \sqrt[n]{n^k} = 1$$

a také, že

$$1 \leq \sqrt[n]{(1+3/2n)(1+1/n)} \leq \sqrt[n]{4}$$

a krajní limity jdou k jedné, tudíž podle věty o dvou policajtech také limita prostřední.

2. (a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^3\\ &\overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\\ &= e\cdot e\cdot e = e^3\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \sqrt{e}$$

U druhého rovnítka jsme použili větu o mocnině a limitě. U poslední rovnosti jsme užili limitu vybrané posloupnosti, neb posloupnost a_{2n} musí mít stejnou limitu jako a_n, což známe a víme, že jde k e.

(c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1-1} \overset{VOAL}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)} = \frac{e^2}{1}$$

Poslední rovnost upravíme podobně jako příklad předchozí a vyjde e^2.

(d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1}\right)^{-1}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{-1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1}\right)^{-1}$$
$$\overset{VOAL}{=} \frac{1}{e}$$

Úvahy o větách viz výše.

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

Řešení:

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

Z Věty o limitě vybrané posloupnosti máme, že

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\to e,$$

tedy lze nalézt n tak, že

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}<10.$$

Zároveň zjevně

$$1<\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

n-tá odmocnina tuto nerovnost nepokazí (promyslete) a tak můžeme odhadovat

$$1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}\leq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}\lim_{n\to\infty}\leq\sqrt[n]{10}=1,$$

takže z Věty o dvou policajtech máme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}=1.$$

Bonus

3. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}$$

Budeme pracovat se zlomkem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[6]{(n^3+1)^2}-\sqrt[6]{(n^2+1)^3}$$

Ten rozšíříme, aby nám zmizela šestá odmocnina. Měla by vyjít 0.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}-\sqrt{3^n+2^n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^5 + \left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^4\sqrt{n^2+1} + \dots + \left(\sqrt{n^2+1}\right)^5}{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^5 + \dots + \dots + \left(\sqrt{n^2+1}\right)^5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+1)^2 - (n^2+1)^3}{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^5 + \dots + \left(\sqrt{n^2+1}\right)^5} =$$

$$= \lim \frac{n^5\left(-3n^4/n^5 + 2n^3/n^5 - 3n^2/n^5\right)}{n^5\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}\right)^5 + \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}\right)^4\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \dots + \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^5\right.}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} \frac{0+0-0}{\left(\sqrt[3]{1+0}\right)^5 + \left(\sqrt[3]{1+0}\right)^4\sqrt{1+0} + \dots \left(\sqrt{1+0}\right)^5} = \underline{0}$$

Bonus

(3)(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n} - \sqrt{3^n+2^n}}$

$$\frac{3^n+2\cdot 2^n-3^n-2^n}{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n}} = \frac{2^n}{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n}}$$

tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n}}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n}} = \sqrt{3}$$

$\sqrt{3} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n}} \leq \qquad\qquad \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\cdot\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}}$

$\leq \lim \sqrt[n]{2\cdot\sqrt{2\cdot 3^n}} = \lim \sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}$

2 policajti :

(3d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{\sqrt[2n]{4^n+\sqrt{n}}} \overset{\text{VOAL}}{=} \frac{3}{2}$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 3}}{\lim \sqrt[n]{3^n}} \leq \qquad\qquad \leq \lim \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = 3$$

2 policajti

$$\cdot \lim \sqrt[2n]{4^n+\sqrt{n}} \leq \lim \sqrt[2n]{4^n+4^n}$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\lim \sqrt[2n]{4^n}} \leq \qquad\qquad = \sqrt{4} = 2$$

(3e) $$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}} =$$

$$= \cancel{\lim \frac{\sqrt[2n]{n}}{\sqrt[2n]{n}} \cdot (-1)^n \cdot \frac{n^2}{\sqrt[2n]{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3} \cdot (-1)^n \cdot \frac{\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}{1+\frac{\sqrt[2n]{n}}{n^3}} \overset{\text{VOAL}}{=} \frac{0}{1+0} = 0$$

(3) (g)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n+\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = 1$$

2 policajti:

$$\sqrt[n]{2\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \geq \quad \geq \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = 1+\frac{2}{n} \to 1$$

$$= \sqrt[n]{2}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$1 \qquad 1+0$$

(3) (h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^n+3^n \sin(2^n)}{5^n+4^n\cos(n!)}}$

$$= \lim \sqrt[n]{\frac{4^n}{5^n}\cdot\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot\sin 2^n}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n\cos n!}} = \frac{4}{5}\cdot 1$$

neb 2 policajti:

$$\sqrt[n]{\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}} \geq \sqrt[n]{\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot\sin(2^n)}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n\cos n!}} \geq \sqrt[n]{\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n}}$$

$$\text{VI}$$

$$\sqrt[n]{\frac{2}{\frac{1}{5}}} \geq \qquad\qquad \geq \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \to 1$$

$$\swarrow$$

$$1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$1-\frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = (k-1)(k+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdot\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\cdot\frac{(5-1)(5+1)}{5^2}\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\cancel{3}}{2^2}\cdot\frac{2\cdot\cancel{4}}{\cancel{3^2}}\cdot\frac{3\cdot 5}{\cancel{4^2}}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \lim \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\cdot n+1}_{\to 1} \overset{\text{VoAL}}{=} \frac{1}{2}$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{\sqrt[2n]{4^n+\sqrt{n}}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n^2\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^n+3^n\sin(2^n)}{5^n+4^n\cos(n!)}}$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

4. (a) Nechť posloupnost x_n je konvergentní a posloupnost y_n je divergentní. Je možné říci, že posloupnosti a) x_n+y_n, b) x_ny_n jsou také divergentní?

   Řešení: Ano, součet je divergentní. Ne, $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=n$, pak $x_ny_n=1$, což je konvergentní posloupnost.

   (b) Nechť posloupnosti x_n a y_n jsou divergentní. Je možné říci, že posloupnosti a) x_n+y_n, b) x_ny_n jsou také divergentní?

   Řešení: Nemusí být. Např. $x_n=(-1)^n$, $y_n=(-1)^{n+1}$, pak $x_n+y_n=0$ a $x_ny_n=-1$.

   (c) Nechť $\lim x_n=0$ a y_n je libovolná posloupnost. Je možné říci, že $\lim(x_ny_n)=0$?

   Řešení: Nikoli, např $x_n=\frac{1}{n}$ a $y_n=n$. Pak $\lim_{n\to\infty}x_ny_n=1$.

   (d) Nechť $\lim(x_ny_n)=0$. Je možné říci, že platí buď $\lim x_n=0$ nebo $\lim y_n=0$?

   Řešení: Také ne. Nechť x_n je posloupnost, která má na lichých pozicích 0 a na sudých 1. Naopak nechť y_n má na sudých pozicích 0 a na lichých 1. Pak $\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0$, ale ani jedna posloupnost nemá nulovou limitu.