2. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (O dvou policajtech)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel, splňující

(i) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ a_n \leq c_n \leq\ b_n,$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim b_n = A \in \mathbb{R}.$

Pak

$$\lim c_n = A.$$

Věta 2 (O limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel, nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

Věta 3. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s **kladnými** členy, splňující podmínku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Pak také

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

Věta 4. Nechť $\{a_n\}$ je reálná posloupnost, jejíž všechny členy jsou **kladné**. Nechť dále platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Potom platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Věta 5. Pokud q je racionální číslo a $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ (a je vlastní), potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n^q = (\lim_{n\to\infty} a_n)^q.$$

Pokud q je kladné racionální číslo, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $a_n \geq 0$, potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n^q = 0.$$

Věta 6 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Fakta

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
2. $a > 1$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
3. $\beta > 0$, $a > 1$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0$.
4. $\alpha > 0$, $\beta > 0$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^\beta} = 0$.

Nechť $a > 0$, pak:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Příklady

1. Určete limity

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{5,0001^n}$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n + n^3 + \frac{1}{n} + e^n + 5^n}{\ln_{10} n + n^4 + 5^n + n^3 + 4^n}$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$ pro $a, b, c > 0$

   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}}\right)$ pro $a > b > 0$

   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}$

2. Spočtěte limity

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{n}$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n}$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n}$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$

Bonus

3. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n} - \sqrt{3^n+2^n}}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{\sqrt[2n]{4^n+\sqrt{n}}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n^2\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n + \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^n+3^n\sin(2^n)}{5^n+4^n\cos(n!)}}$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

4. Jak to dopadne s posloupnostmi? (Divergentní znamená jak jdoucí do nekonečna, tak oscilující.)

(a) Nechť posloupnost x_n je konvergentní a posloupnost y_n je divergentní. Je možné říci, že posloupnosti a) x_n+y_n, b) x_ny_n jsou také divergentní?

(b) Nechť posloupnosti x_n a y_n jsou divergentní. Je možné říci, že posloupnosti a) x_n+y_n, b) x_ny_n jsou také divergentní?

(c) Nechť $\lim x_n = 0$ a y_n je libovolná posloupnost. Je možné říci, že $\lim(x_ny_n) = 0$?

(d) Nechť $\lim(x_ny_n) = 0$. Je možné říci, že platí buď $\lim x_n = 0$ nebo $\lim y_n = 0$?

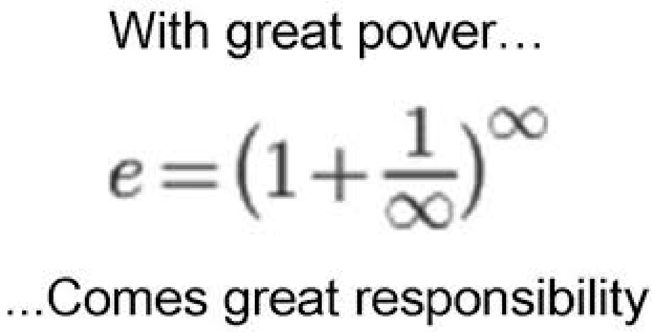

Figure 1: https://www.pinterest.com/pin/357754764120230299/