(1) $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ $\quad$ $\lim \frac{1}{n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$ $\quad$ $\lim \frac{1}{n^2} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$ $\quad$ $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\lim e^n = \infty$ $\quad$ $\lim \frac{1}{2^n} = 0$

$\lim e^{-n} = 0$ $\quad$ $\lim 2^n = \infty$

$\lim \ln n = \infty$ $\quad$ $\lim n! = \infty$

(2) $\lim (-1)^n \nexists$ $\quad$ $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$

$\lim (-1)^n \cdot n \nexists$ $\quad$ $\lim_{n\to\infty} \cos(\pi n) \cdot \sqrt{n}$

$= \lim (-1)^n \sqrt{n} \quad \nexists$

(3)(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{20}{\sqrt{n}} \overset{\text{VOAL}}{=} \lim 20 \cdot \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 20 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^3+1}} = \lim \frac{n^{3/2} \cdot \sqrt{n}}{n^{3/2} \sqrt{1 + 1/n^3}} \overset{\text{VOAL}}{=} \frac{\infty}{1+0} = \underline{\underline{\infty}}$

(3)(a) $\lim_{n\to\infty} -n^8 + 2n^3 - 4 = \lim n^8 \left(-1 + \frac{2}{n^5} - \frac{4}{n^8}\right)$

$\overset{\text{VOAL}}{=} \lim n^8 \cdot \lim \left(-1 + \frac{2}{n^5} - \frac{4}{n^8}\right) =$

$\overset{\text{VOAL}}{=} \lim n^8 \cdot \left(\lim -1 + \lim \frac{2}{n^5} - \lim \frac{4}{n^8}\right) = \infty \cdot (-1+0-0)$

$= \underline{\underline{-\infty}}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 + 2n - 7}{n^5 - 6n^2 + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n^5} \cdot \frac{2 + \frac{2}{n^4} - \frac{7}{n^5}}{1 - \frac{6}{n^3} + \frac{4}{n^5}}$

$\overset{\text{VOAL}}{=} \frac{\lim 2 + \frac{2}{n^4} - \frac{7}{n^5}}{\lim 1 - \frac{6}{n^3} + \frac{4}{n^5}} \overset{\text{VOAL}}{=} \frac{\lim 2 + \lim \frac{2}{n^4} - \lim \frac{7}{n^5}}{\lim 1 - \lim \frac{6}{n^3} + \lim \frac{4}{n^5}}$

$= \frac{2+0-0}{1-0+0} = \underline{\underline{2}}$

(3)(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+n-5}{n^2+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{5n + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}{1+\frac{8}{n^2}}$

$\overset{VOAL}{=}$ "$\frac{\infty + 0 - 0}{1+0}$" $= \underline{\underline{\infty}}$

(3)(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \lim \frac{n^{2/3}}{n+1} = \lim \frac{n}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n^{1/3}}}{1+1/n}$

$\overset{VOAL}{=} \frac{0}{1+0} = \underline{\underline{0}}$

(3) (g) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n + \cos n^2}{n^2-3} = 0$ $\quad |\sin n + \cos n^2| < 2$ $\quad \lim \frac{1}{n^2-3} = 0$

omezená a mizející

(4)(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} = \infty + \infty = \underline{\underline{\infty}}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \lim \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{1} \cdot \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$= \lim \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} =$ "$\frac{2}{\infty}$" $= 0$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{\sqrt{1+1/n^2}}{1} = \lim \sqrt{1+1/n^2}$

$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{1} = \underline{\underline{1}}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2-3} - \sqrt{(n+2)^2}} = \lim \frac{(n-1)-(n)}{n^2-3-(n+2)^2} \cdot \frac{\sqrt{n^2-3} + \sqrt{(n+2)^2}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{-4n-7} \cdot \frac{\sqrt{n^2-3} + \sqrt{n^2+4n+4}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{(-1)}{-4-\frac{7}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{1-3/n^2} + \sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}} + \sqrt{1}}$

$\overset{VOAL}{=} \frac{-1}{-4-0} \cdot \frac{1}{\infty} \cdot \frac{\sqrt{1-0} + \sqrt{1+0+0}}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1}} = \underline{\underline{0}}$

(4e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n} \cdot \dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} =$

$$= \lim \frac{(n^2+1)-n^2}{n(\sqrt{n^2+1}+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n^2+1}+n)} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{\infty(\infty+\infty)} = \underline{\underline{0}}$$

(4f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+3n-1}-n^2}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2-1}} \cdot \dfrac{\sqrt{n^4+3n-1}+n^2}{\sqrt{n^4+3n-1}+n^2} \cdot$

VZOREC

A^6-B^6

$$\cdot \frac{\sqrt[3]{(n^3+1)^5} + \sqrt[3]{(n^3+1)^4}\cdot\sqrt{n^2-1} + \dots + \sqrt{(n^2-1)^5}}{\sqrt[3]{(n^3+1)^5} + \dots + \sqrt{(n^2-1)^5}}$$

$$= \lim \frac{n^4+3n-1-n^4}{(n^3+1)^2-(n^2-1)^3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^3+1)^5} + \sqrt[3]{(n^3+1)^4}\sqrt{n^2-1} + \dots + \sqrt{(n^2-1)^5}}{\sqrt{n^4+3n-1}+n^2}$$

$$= \lim \frac{3n-1}{3n^4+2n^3-3n^2+2} \cdot \frac{1}{1}$$

$\overbrace{1 + 1\cdot 1 + }^{6 \text{ členů}}$

vytkneme n^6

$$= \lim \frac{\cancel{n\cdot n^5}}{\cancel{n^4\cdot n^2}} \cdot \frac{\overbrace{3-\frac{1}{n}}^{3-0}}{\underbrace{3+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}_{3+0-0+0}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^5} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^4}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + \dots}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^4}}}_{\sqrt{1+0-0}} + 1}$$

$$\text{VOAL} = \frac{3}{3} \cdot \frac{6}{2}$$

V odmocnině každého: $\sqrt[3]{(n^3+1)^5} = \sqrt[3]{\frac{n^{3\cdot 5}}{n^{3\cdot 5}}(n^3+1)^5} = \sqrt[3]{n^{15}\cdot\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)^5} = n^5 \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}$

Řešení: Užijeme opakovaně větu o aritmetice limit, promyslete si, kde přesně.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5+2n-7}{n^5-6n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5(2+\frac{2}{n^4}-\frac{7}{n^5})}{n^5(1-\frac{6}{n^3}+\frac{4}{n^5})} = \frac{\lim_{n\to\infty}(2+\frac{2}{n^4}-\frac{7}{n^5})}{\lim_{n\to\infty}(1-\frac{6}{n^3}+\frac{4}{n^5})} =$$
$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^4} - \lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^5}}{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^3} + \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^5}} = \frac{2+0-0}{1-0+0} = 2$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+n-5}{n^3+8}$$

Řešení: Opět věta o aritmetice limit, ale už to nebudeme rozepisovat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+n-5}{n^3+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(\frac{5}{n}+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{8}{n^3}\right)} = \frac{0+0-0}{1+0} = 0$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin(n!)}{n+1}$$

Řešení: Funkce sinus je omezená, tedy:

$$0 = \lim_{n\to\infty}(-1)\cdot\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \le \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin(n!)}{n+1} \le \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = 0$$

5a (d)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right\}$$

Řešení: použitím vztahu $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ máme

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)}{n+2}-\frac{n}{2}\right\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)-n(n+2)}{2(n+2)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{-n)}{2(n+2)}\right\} = -\frac{1}{2}$$

5b (e)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}\right\}$$

Řešení: použitím vztahu $1^2+2^2+\ldots+n^2 = n(n+1)(2n+1)$ máme

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)(2+1/n)}{1}$$
$$=(1+0)(2+0) = 2.$$

6a (f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}$$

Řešení: Roznásobíme závorky podle binomické věty a nebudeme se zbytečně trápit s malými mocninami:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^{100}+100\cdot 4n^{99}+\cdots)(n^{100}+100\cdot 3n^{99}+\cdots)}{(n^{100}+100\cdot 2n^{99}+\cdots)-n^{100}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{99}(\cdots)}{2n^{99}(\cdots)} = \frac{1}{2}$$

6b (g)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n}, \quad \text{kde}|a|, |b| < 1$$

Řešení: Stačí si uvědomit, jaký je součet geometrické řady a věta o aritmetice limit...: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$. Limita vyjde: $\frac{1-b}{1-a}$

5c (h)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Řešení: Použijeme trik:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

. Nyní aplikováno na limitu získáme:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Ocásek sumy je maličký (jde k nule), a všechny členy kromě jedničky se sežerou... Tedy výsledek je roven 1.

6g (i)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Řešení: Použijeme opět trik:

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

Když si nyní limitu rozepíšeme, začnou se nám závorky navzájem krátit s jmenovateli a zbyde nám 1/2 a malý zbytek. Tedy limita je rovna 1/2.

6h (j)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$$

6h

Řešení: Řešíme na základě znalosti nerovnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

což jde k nule. Zespoda je limita také omezená, vše je kladné. Čili celkem je rovna 0.

4. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. (a) Najděte suprema a infima následujících množin v $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} \quad \inf = 1 \quad \sup \text{neexistuje}$$

$$(0;2] \quad \inf = 0 \quad \sup = 2$$

$$(0;1) \cap \mathbb{Q} \quad \inf = 0 \quad \sup = 1$$

$$\{x \in \mathbb{Z}; x \geq -\sqrt{6}\} \quad \inf = -2 \quad \sup \text{neexistuje}$$

$$\{(-1)^n \sqrt{n}; n \in \mathbb{N}\} \quad \inf \text{neexistuje} \quad \sup \text{neexistuje}$$

$$\{\arctan x; x \in \mathbb{R}\} \quad \inf = -\pi/2 \quad \sup = \pi/2$$

2. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n\frac{\pi}{4})$$

Řešení: Najdeme vybrané podposloupnosti s různými limitami. Kupříkladu pro n dělitelná 8 získáme $\sin(2\pi) = 0$, zatímco pro n, která mají po dělení 8 zbytek 2 získáme $\sin(1/2\pi) = 1$. Takže máme 2 různé podposloupnosti s různými, dosti vzdálenými limitami. Stačí použít Větu o limitě vybrané posloupnosti. Jiný způsob je použít Bolzano–Cauchyho podmínku: zvolíme $\epsilon < 1$ a najdeme protipříkladová n_0 pomocí úvahy výše.

6e (b)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

Řešení: Jednak když se podíváme na úlohu, můžeme zkusit odhadnout limitu. Odmocnina zmenšuje rozdíly, takže můžeme doufat, že rozdíl se bude zmenšovat a limita půjde k nule. A teď formálně - rozšíříme vhodným zlomkem tak, abychom se zbavili odmocnin:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \cdot \frac{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + n^{2/3}}{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + n^{2/3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + n^{2/3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/3}}{n^{2/3}} \frac{\frac{1}{n^{2/3}}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + 1} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt[3]{1+0+0} + \sqrt[3]{1+0} + 1} = 0$$

Uvědomíme si, že jsme použili Větu o aritmetice limit.

(6d) (c)

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

Řešení: Nejprve se soustředíme na sudé členy a zlomek rozšíříme:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2})\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2}}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$$

Pro liché členy spočítáme limitu úplně stejně, vyjde nám $-1/2$. Čili limita neexistuje.

(d)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}$$

Budeme pracovat se zlomkem:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[6]{(n^3+1)^2}-\sqrt[6]{(n^2+1)^3}$$

Ten rozšíříme, aby nám zmizela šestá odmocnina. Měla by vyjít 0.

(e)

$$\lim_{n\to\infty}3\left(1-\frac{1}{n}\right)+2(-1)^n$$

Řešení: Rozdělíme opět na sudé a liché členy:

$$\lim_{n\to\infty}3(1+\frac{1}{n})+2=3+2=5$$

$$\lim_{n\to\infty}3(1+\frac{1}{n})-2=3-2=1$$

Čili opět máme dvě různé limity, ale jedna posloupnost nemůže mít 2 limity. Tedy limita neexistuje.

6f (f)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6}-\sqrt[3]{n^2}}$$

Řešení: Rozšíříme jmenovatel tak, abychom podle vztahu $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$ odstranili odmocninu ve jmenovateli. Rozšíříme čitatel tak, abychom podle vztahu $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$ odstranili odmocninu v čitateli. Vzniklé odmocniny se již nebudou odečítat.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6}-\sqrt[3]{n^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(n^2+7)^2}+\sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+7}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2}}{\sqrt[3]{(n^2+7)^2}+\sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+7}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2}}\cdot$$

(6f)

$$\cdot \frac{\sqrt[3]{(n^2+6)^2}+\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n^2+6}+\sqrt[3]{(n^2)^2}}{\sqrt[3]{(n^2+6)^2}+\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n^2+6}+\sqrt[3]{(n^2)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{6} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^2+6)^2}+\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{n^2+6}+\sqrt[3]{(n^2)^2}}{\sqrt[3]{(n^2+7)^2}+\sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+7}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2}} = 1 \cdot \frac{1+1+1}{1+1+1} = 1.$$

(Uvědomte si, že čitatel i jmenovatel mají největší mocninu $n^{4/3}$, mají tři sčítance a ve všech je u koeficientu $n^{4/3}$ jednička. Anebo poctivě vytkněte $n^{4/3}$ v čitateli i jmenovateli a proveďte limity – dostanete tři jedničky v čitateli i jmenovateli.)

(g)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n+n\sin 2n}{n\cos 3n+(2n+\sin 4n)^2}$$

Řešení: Goniometrické funkce jsou omezené, a tedy nezajímavé. Nejvíce rostoucí člen je v čitateli i jmenovateli n^2, vytkneme jej tedy:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+2n+n\sin 2n}{n\cos 3n+(2n+\sin 4n)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} \frac{2+2/n+(\sin 2n)/n}{(\cos 3n)/n+(2+(\sin 4n)/n)^2}$$
$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{2+0+0}{0+2^2} = \frac{1}{2}.$$

Limity typu $\frac{\sin \text{cokoliv}}{n}$, $\frac{\cos \text{cokoliv}}{n}$ konvergují k nule podle věty "omezená posloupnost krát nula".

3. Pro jaké posloupnosti (a_n) existuje $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n a_n$?

Řešení: Pokud je $a_n \geq 0$, pak limita existuje, právě když $\lim a_n = 0$.

Jestliže $\lim a_n = 0$, potom $\lim(-1)^n a_n = 0$ podle věty o limitě součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule (jednoduchý důsledek věty o dvou policajtech).

Jestliže $\lim a_n \neq 0$, pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $n > n_0$, kde n_0 je nějaké přirozené číslo, je $a_n > \varepsilon$. Potom ale $|a_n - a_{n+1}| > 2\varepsilon$ a není tedy splněna Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci posloupnosti.

2. Pokud a_n střídá znaménka, pak rozlišíme dva případy.

a) $\lim a_n = 0$. Potom $\lim(-1)^n a_n = 0$ ze stejného důvodu jako výše.

b) $\lim a_n \neq 0$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $n > n_0$, kde n_0 je nějaké přirozené číslo, je $|a_n| > \varepsilon$. Protože limitou nemůže být podle předpokladů nula, pak, má-li posloupnost $(-1)^n a_n$ limitu mít, musí od nějakého indexu n_1 (předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $n_1 > n_0$) přestat střídat znaménka. Z toho plyne, že od indexu n_1 lze psát $a_n = (-1)^n b_n$, kde posloupnost b_n od indexu n_1 je stále kladná nebo záporná. Potom $\lim(-1)^n a_n$ existuje právě tehdy, pokud existuje $\lim b_n$ (z podobného důvodu jako v 1. části příkladu).