Goniometrické substituce

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/

Teorie

Buď $R(\cdot,\cdot)$ racionální funkce dvou proměnných.

1. Jestliže $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $t = \sin x$. Pak $\mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x$.

2. Jestliže $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $t = \cos x$. Pak $\mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x$.

3. Jestliže $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $t = \operatorname{tg} x$, je-li $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy jsou

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}, \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2} \tag{1}$$

4. Vždy lze užít substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, je-li $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, kde k je celé číslo. Pokud ale lze užít některou z výše uvedených substitucí, dáváme jí přednost. Transformační vztahy mají podobu

$$\mathrm{d}x = \frac{2\ \mathrm{d}t}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{2}$$

5. Místo (3) lze užít i $t = \cot x$, je-li $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy mají podobu

$$\mathrm{d}x = \frac{-1\,\mathrm{d}t}{t^2+1}, \qquad \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2} \tag{3}$$

6. Místo (4) lze užít i $t = \cot \frac{x}{2}$, je-li $x \in (0 + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy mají podobu

$$\mathrm{d}x = \frac{-2\ \mathrm{d}t}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = -\frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{4}$$