XIV. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

XIV.1. Základní metoda řešení

Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = g(y)h(x). \tag{5}$$

Metoda řešení pro g a h spojité na svých definičních oborech

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h. (Tím máme vymezeny maximální intervaly, na kterých můžeme hledat řešení.)

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ tzv. *singulárním* (též *stacionárním*) řešením rovnice (5).

3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J ze 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová. Budeme hledat řešení rovnice (5), jejichž definiční obor je obsažen v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li y takové řešení, pak pro každé $x \in D_y$ platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k funkci h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J. Potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + C$$

na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

5. Nyní zafixujeme C a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + C \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů řešení musí mít tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + C),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G. Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení rovnice (5). Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (5), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x\to b-} y_1(x) = \lim_{x\to b+} y_2(x) = \alpha \in D_g.$$

Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b, c); \end{cases}$$

je řešením rovnice (5) na intervalu (a, c).

XIV.2. Autonomní diferenciální rovnice

Autonomní diferenciální rovnice jsou diferenciální rovnice nezávisející explicitně na proměnné x (na „čase“). Autonomní diferenciální rovnice prvního řádu vyřešená vzhledem k nejvyšší derivaci je tedy rovnice tvaru

$$y' = g(y). \tag{6}$$

Věta 6. *Každé řešení rovnice* (6)*, kde g je libovolná funkce, je monotónní.*

Poznámka. Je-li funkce y řešením rovnice (6) na intervalu (a, b), pak pro každé $c \in \mathbb{R}$ je funkce $x \mapsto y(x+c)$, $x \in (a-c, b-c)$, rovněž jejím řešením.

Lemma 7. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce g je spojitá a kladná na $\langle a, b)$ a má v bodě b zleva kladnou limitu. Pak $\int_a^b \frac{1}{g}$ konverguje.*

Lemma 8. *Nechť funkce g je spojitá na $\langle a, b\rangle$, kladná na $\langle a, b)$, $g(b) = 0$ a $g'_-(b)$ existuje vlastní. Pak $\int_a^b \frac{1}{g}$ diverguje.*