5. *Úloha:* Určete vzorec pro obecný tvar řešení rovnice

$$x'' + 3x' + 2x = \frac{1}{\mathrm{e}^t + 1}.$$

Řešení: Rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty tvaru (8.1) a její řešení budeme hledat metodou variace konstant popsanou v odstavci 8. Charakteristická rovnice příslušné homogenní rovnice je podle (6.3)

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Tato rovnice má dva kořeny $\lambda_1 = -2$ a $\lambda_2 = -1$ a podle (6.5) je obecný tvar řešení homogenní rovnice

$$u(t; c_1, c_2) = c_1\mathrm{e}^{-2t} + c_2\mathrm{e}^{-t}, \ t \in \mathrm{R}.$$

Partikulární řešení rovnice budeme podle (8.3) hledat ve tvaru

$$w(t) = c_1(t)\mathrm{e}^{-2t} + c_2(t)\mathrm{e}^{-t}, \ t \in \mathrm{R}.$$

Po dosazení do rovnice dostaneme pro hledané funkce podle (8.9) soustavu

$$\begin{aligned} c_1'(t)\mathrm{e}^{-2t} + c_2'(t)\mathrm{e}^{-t} &= 0 \\ -2c_1'(t)\mathrm{e}^{-2t} - c_2'(t)\mathrm{e}^{-t} &= \tfrac{1}{\mathrm{e}^t+1}, \end{aligned}$$

která má řešení $c_1'(t) = -\frac{\mathrm{e}^{2t}}{e^t+1}$ a $c_2'(t) = \frac{e^t}{e^t+1}$ a tudíž

$$c_1(t) = -\int \frac{\mathrm{e}^{2t}}{e^t+1}\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} e^t = z \\ e^t\mathrm{d}t = \mathrm{d}z \end{array} \right| = \int \frac{-z}{z+1}\mathrm{d}z = \int \left(\frac{1}{z+1} - 1\right)\mathrm{d}z$$

$$= \ln|z| - z = \ln(\mathrm{e}^t + 1) - e^t$$

a

$$c_2(t) = \int \frac{e^t}{e^t+1}\mathrm{d}t = \ln(e^t + 1).$$

Podle (8.11) je obecný tvar řešení

$$x(t) = x(t; c_1, c_2) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}\ln(e^t + 1) + e^{-t}\ln(e^t + 1) =$$

$$= c_1e^{-2t} + c_2^*e^{-t} + (e^{-2t} + e^{-t})\ln(e^t + 1), \ t \in \mathrm{R}, \ c_2^* = c_2 - 1.$$

6. *Úloha:* Určete vzorec pro obecný tvar řešení rovnice

(1b)

$$x'' + x = \frac{1}{\sin t}$$

a řešení určené počátečními podmínkami

$$a)\ x(\pi/2) = 1, \ x'(\pi/2) = 0, \qquad b)\ x(-\pi/2) = 0, \ x'(-\pi/2) = \pi/2.$$

Řešení: Rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty tvaru (8.1) a její řešení budeme hledat metodou variace konstant popsanou v odstavci 8. Charakteristická rovnice příslušné homogenní rovnice je podle (6.3)

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Tato rovnice má dva ryze imaginární kořeny $\lambda_1 = \mathrm{j}$ a $\lambda_2 = -\mathrm{j}$ a podle (6.7) je obecný tvar řešení homogenní rovnice

$$u(t; c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \ t \in \mathrm{R}.$$

Partikulární řešení rovnice budeme podle (8.3) hledat ve tvaru

$$w(t) = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t, \ t \in (k\pi, (k+1)\pi), \ k \text{ je celé číslo}.$$

Po dosazení do rovnice dostaneme pro hledané funkce podle (8.9) soustavu

$$\begin{aligned} c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t &= \ 0 \\ -c_1'(t) \sin t + c_2'(t) \cos t &= \ \tfrac{1}{\sin t}, \end{aligned}$$

která má řešení $c_1'(t) = -1$ a $c_2'(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$ a tudíž

$$c_1(t) = \int -\mathrm{d}t = -t \quad \text{a} \quad c_2(t) = \int \frac{\cos t}{\sin t} \mathrm{d}t = \ln|\sin t|.$$

Podle (8.11) je obecný tvar řešení

$$x(t) = x(t; c_1, c_2) = (c_1 - t) \cos t + (c_2 + \ln|\sin t|) \sin t, \ t \in (k\pi, (k+1)\pi),$$

kde k je celé číslo.

Pro řešení Cauchyovy úlohy potřebujeme znát derivaci řešení

$$x'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + t \sin t - \cos t + \cos t \ln|\sin t| + \frac{\cos t}{|\sin t|} \mathrm{sgn}(\sin t) \sin t =$$

$$(-c_1 + t) \sin t + (c_2 + \ln|\sin t|) \cos t.$$

Pro a) dostaneme: $t \in (0, \infty)$, $\sin t > 0$,

$$x(\pi/2) = x(\pi/2; c_1, c_2) = c_2 + \ln 1 = 1 \ \Rightarrow c_2 = 1$$

a

$$x'(\pi/2) = x'(\pi/2; c_1, c_2) = -c_1 + \pi/2 = 0 \Rightarrow c_1 = \pi/2,$$

tedy

$$\underline{x(t) = (\pi/2 - t) \cos t + (1 + \ln(\sin t)) \sin t, \ t \in (0, \pi).}$$

Pro b) dostaneme: $t \in (0, \infty)$, $\sin t < 0$,

$$x(-\pi/2) = x(-\pi/2; c_1, c_2) = -c_2 = 0 \ \Rightarrow c_2 = 0$$

a

$$x'(-\pi/2) = x'(-\pi/2; c_1, c_2) = c_1 + \pi/2 = \pi/2 \ \Rightarrow c_1 = 0$$

tedy

$$\underline{x(t) = -t \cos t + \sin t \ln(-\sin t), \ t \in (-\pi, 0).}$$

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2.ŘÁDU

ZDENĚK ŠIBRAVA

1. Obecné řešení lin. dif. rovnice 2.řádu s konstantními koeficienty

(1d)

1.1. Variace konstant.

Příklad 1.1. *Najděme obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \tag{1}$$

Obecné řešení lineární diferenciální rovnice (1) má tvar

$$\varphi(x) = \varphi_h(x) + \varphi_p(x),$$

kde $\varphi_h(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$ je obecné řešení příslušné lineární diferenciální rovnice bez pravé strany

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \tag{2}$$

a $\varphi_p(x)$ je nějaké pevné (partikulární) řešení rovnice (1).

Funkce $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ tvoří fundamentální systém rovnice (2), tj. jsou bází vektorového prostoru všech řešení rovnice (2)

Řešení rovnice (2) hledáme ve tvaru $\varphi(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, kde λ je řešením charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Je tedy $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = -2$. Odtud

$$\varphi_h(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-x} + c_2\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Partikulární řešení rovnice (1) budeme hledat metodou variace konstant, tj. ve tvaru $\varphi_p(x) = g_1(x)\varphi_1(x) + g_2(x)\varphi_2(x)$. Derivace hledaných funkcí g_1' a g_2' dostaneme jako řešení soustavy

$$\begin{aligned} g_1'(x)\varphi_1(x) + g_2'(x)\varphi_2(x) &= 0, \\ g_1'(x)\varphi_1'(x) + g_2'(x)\varphi_2'(x) &= f(x), \end{aligned}$$

kde $f(x)$ je pravá strana řešené lineární diferenciální rovnice.

V našem případě

$$\varphi_p(x) = g_1(x)\,\mathrm{e}^{-x} + g_2(x)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

a

$$\begin{aligned} g_1'(x)\,\mathrm{e}^{-x} + g_2'(x)\,\mathrm{e}^{-2x} &= 0, \\ g_1'(x)(-\mathrm{e}^{-x}) + g_2'(x)(-2\,\mathrm{e}^{-2x}) &= \tfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$g_1'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)}, \qquad g_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{(1+e^x)}$$

a odtud

$$g_1(x) = \int \frac{e^x}{(1+e^x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \ln(1+t) = \ln(1+e^x)$$

a

$$g_2(x) = -\int \frac{e^{2x}}{(1+e^x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = -t+\ln(1+t) = -e^x + \ln(1+e^x).$$

Potom

$$\varphi_p(x) = e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}(-e^x + \ln(1+e^x))$$

a

(1d)

$$\underline{\underline{\varphi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}(-e^x + \ln(1+e^x))}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(1a)

Příklad 1.2. *Najděme obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \tag{3}$$

Nejdříve najdeme obecné řešení rovnice bez pravé strany

$$y'' - 2y' + y = 0 \tag{4}$$

Řešením její charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

dostaneme $\lambda = 1$, což je její dvojnásobný kořen. Fundamentální systém tedy tvoří funkce $\varphi_1(x) = e^x$ a $\varphi_2(x) = x e^x$. Odtud

$$\varphi_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Jedno pevné partikulární řešení rovnice (3) najdeme opět metodou variace konstant, tj. ve tvaru

$$\varphi_p(x) = g_1(x) e^x + g_2(x) x e^x,$$

kde derivace neznámých funkcí získáme řešením soustavy

$$\begin{aligned} g_1'(x) e^x + g_2'(x) x e^x &= 0, \\ g_1'(x) e^x + g_2'(x)(e^x + x e^x) &= \tfrac{e^x}{x}. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$g_1'(x) = -1, \qquad g_2'(x) = \frac{1}{x}$$

a odtud

$$g_1(x) = -x, \qquad g_2(x) = \ln|x|.$$

Je tedy

$$\varphi_p(x) = -x e^x + x \ln|x| e^x,$$

(1a)

a

$$\underline{\underline{\varphi(x) = \mathrm{e}^x(c_1 + c_2 x - x + x \ln |x|)}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Příklad 1.3. *Najděme obecné řešení diferenciální rovnice*

(1e)

$$y'' + y = \operatorname{tg} x \tag{5}$$

Nejdříve najdeme obecné řešení rovnice bez pravé strany

$$y'' + y = 0 \tag{6}$$

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{12} = \pm \mathrm{i}$. Jim odpovídající fundamentální systém

$$\mathrm{e}^{(0 \pm 1 \cdot \mathrm{i})x} = \mathrm{e}^{0 \cdot x} (\cos(1 \cdot x) \pm \mathrm{i} \sin(1 \cdot x))$$

nahradíme reálným fundamentálním systémem

$$\varphi_1(x) = \mathrm{e}^{0 \cdot x} \cos(1 \cdot x) = \cos x, \qquad \varphi_2(x) = \mathrm{e}^{0 \cdot x} \sin(1 \cdot x) = \sin x.$$

Potom

$$\varphi_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

je obecné řešení rovnice (6).

Partikulární řešení rovnice (5) budeme hledat ve tvaru

$$\varphi_p(x) = g_1(x) \cos x + g_2(x) \sin x,$$

kde derivace neznámých funkcí získáme řešením soustavy

$$\begin{aligned} g_1'(x) \cos x + g_2'(x) \sin x &= 0, \\ -g_1'(x) \sin x + g_2'(x) \cos x &= \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$g_1'(x) = -\sin x \operatorname{tg} x, \quad g_2'(x) = \sin x$$

a odtud

$$g_1(x) = \int \frac{-\sin^2 x}{\cos x} \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin^2 x - 1} \mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{t^2 - 1} \mathrm{d}t = \sin x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right|,$$

$g_2(x) = -\cos x$.

Potom

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{2} \cos x \cdot \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right|,$$

a

$$\underline{\underline{\varphi(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} \cos x \cdot \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right|}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Tato rovnice má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_0 = 1$ a podle (6.6) je obecný tvar řešení homogenní rovnice

$$u(t; c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 t e^t, \ t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } (0, \infty).$$

Partikulární řešení rovnice budeme podle (8.3) hledat ve tvaru

$$w(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t, \ t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } (0, \infty).$$

Po dosazení do rovnice dostaneme pro hledané funkce podle (8.9) soustavu

$$\begin{aligned} c_1'(t)e^t + c_2'(t)te^t &= 0 \\ c_1'(t)e^t + c_2'(t)(t+1)e^t &= \tfrac{e^t}{t}, \end{aligned}$$

která má řešení $c_1'(t) = -1$ a $c_2'(t) = \frac{1}{t}$ a tudíž

$$c_1(t) = \int (-1)\mathrm{d}t = -t \text{ a } c_2(t) = \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln|t|.$$

Podle (8.11) je obecný tvar řešení

$$x(t) = x(t; c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 t e^t - te^t + te^t \ln|t|, \ t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } (0, \infty).$$

4. *Úloha:* Určete vzorec pro obecný tvar řešení rovnice

(1e)

$$x'' + 2x' + x = 3\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t+1}.$$

Řešení: Rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty tvaru (8.1) a její řešení budeme hledat metodou variace konstant popsanou v odstavci 8. Charakteristická rovnice příslušné homogenní rovnice je podle (6.3)

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Tato rovnice má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_0 = -1$ a podle (6.6) je obecný tvar řešení homogenní rovnice

$$u(t; c_1, c_2) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}, \ t \in \mathrm{R}.$$

Partikulární řešení rovnice budeme podle (8.3) hledat ve tvaru

$$w(t) = c_1(t)e^{-t} + c_2(t)te^{-t}, \ t \in (-1, \infty).$$

Po dosazení do rovnice dostaneme pro hledané funkce podle (8.9) soustavu

$$\begin{aligned} c_1'(t)e^{-t} + c_2'(t)te^{-t} &= 0 \\ -c_1'(t)e^{-t} + c_2'(t)(1-t)e^{-t} &= 3\mathrm{e}^{-t}\sqrt{t+1}, \end{aligned}$$

která má řešení $c_1'(t) = -3t\sqrt{t+1}$ a $c_2'(t) = 3\sqrt{t+1}$ a tudíž

$$c_1(t) = \int (-3t\sqrt{t+1})\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{t+1} = z, & t = z^2 - 1 \\ \mathrm{d}t = 2z\mathrm{d}z & \end{array} \right| = 6\int (z^2 - z^4)\mathrm{d}z =$$

$$= 2\sqrt{(t+1)^3} - \frac{6}{5}\sqrt{(t+1)^5}, \ t \in (-1, \infty)$$

a

$$c_2(t) = \int 3\sqrt{t+1}\mathrm{d}t = 2\sqrt{(t+1)^3}, \ t \in (-1, \infty).$$

Podle (8.11) je obecný tvar řešení

$$x(t) = (t; c_1, c_2) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + 2e^{-t}\sqrt{(t+1)^3} - \frac{6}{5}e^{-t}\sqrt{(t+1)^5} + 2te^{-t}\sqrt{(t+1)^3} =$$

$$= \left[c_1 + c_2 t + \frac{4}{5}\sqrt{(t+1)^5}\right] e^{-t}, \ t \in (-1, \infty).$$

Jiná možnost, jak najít partikulární řešení je tato. Pravou stranu nehomogenní rovnice napíšeme v komplexním tvaru

$$e^{2t}\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{(2+i)t} - e^{(2-i)t}\right)$$

a budeme hledat komplexní partikulární řešení $w_1(t)$ pro pravou stranu $b_1(t) = \frac{1}{2i}e^{(2+i)t}$. Protože koeficienty v rovnici jsou reálné platí pro partikulární řešení $w_2(t)$ s pravou stranu $b_2(t) = -\frac{1}{2i}e^{(2-i)t} = \overline{b}_1(t)$ vztah $w_2(t) = \overline{w}_1(t)$ a partikulární řešení celé rovnice je $w(t) = w_1(t) + w_2(t) = 2\,\mathrm{Re}\big(w_1(t)\big)$. Stačí tedy najít řešení $w_1(t)$. Protože je $2+i$ kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat $w_1(t)$ ve tvaru $w_1(t) = ate^{(2+i)t}$, kde a je komplexní konstanta. Derivace funkce $w_1(t)$ jsou

$$w_1'(t) = a\big((2+i)t+1\big)e^{(2+i)t} \quad \text{a} \quad w_1''(t) = a\Big((3+4i)t + 2(2+i)\Big)e^{(2+i)t}\,.$$

Po dosazení do příslušné diferenciální rovnice dostaneme

$$2aie^{(2+i)t} = \frac{1}{2i}e^{(2+i)t} \Longrightarrow a = -\frac{1}{4} \Longrightarrow w(t) = -\frac{t}{2}\,\mathrm{Re}\Big(e^{(2+i)t}\Big) = -\frac{t}{2}\,e^{2t}\cos t\,.$$

Partikulární řešení dané rovnice je tedy

$$w(t) = -\frac{t}{2}\,e^{2t}\cos t\,.$$

---

(17)

Příklad 8. Najděte partikulární řešení rovnice $x'' - x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$.

Řešení:

Máme najít jedno řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Protože pravá strana této rovnice nemá speciální tvar, budeme hledat partikulární řešení metodou variace konstant. Příslušná homogenní rovnice $x'' - x = 0$ má charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 1 = 0$, která má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Tedy obecné řešení této homogenní rovnice je

$$u(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru $w(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t}$, kde $C_1(t)$ a $C_2(t)$ jsou diferencovatelné funkce. Derivováním dostaneme

$$w'(t) = C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^{-t} + C_1e^t - C_2e^{-t}\,.$$

V této rovnosti položíme

$$C_1'(t)e^t + C_2'(t)e^{-t} = 0$$

a za tohoto předpokladu je $w'(t) = C_1e^t - C_2e^{-t}$. Tedy

$$w''(t) = C_1'(t)e^t - C_2'(t)e^{-t} + C_1e^t + C_2e^{-t}\,.$$

Když dosadíme do dané rovnice, zjistíme, že funkce $C_1'(t)$ a $C_2'(t)$ splňují soustavu rovnic

$$C_1'(t)e^t + C_2'e^{-t} = 0 \quad \text{a} \quad C_1'(t)e^t - C_2'e^{-t} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\,.$$

Z této soustavy plyne

$$C_1'(t) = \frac{1}{2}\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}e^{-t}\,,\quad C_2'(t) = -\frac{1}{2}\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}e^{t} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow C_1(t) = \frac{e^{-t}}{2} - \operatorname{arctg} e^{-t}\,,\quad C_2(t) = -\frac{e^t}{2} + \operatorname{arctg} e^{t}\,.$$

Tedy partikulární řešení je

$$w(t) = \mathrm{e}^t C_1(t) + \mathrm{e}^{-t} C_2(t) = \mathrm{e}^{-t} \operatorname{arctg} \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t \operatorname{arctg} \mathrm{e}^{-t} .$$

Příklad 9. Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice $t^2 x'' - 2tx' + 2x = t$, které splňuje podmínky $x(1) = 0$ a $x'(1) = 1$.

Řešení:

Vlastně máme řešit Cauchyho úlohu pro nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu. Protože daná rovnice Eulerova typu, budeme řešení příslušné homogenní rovnice $t^2x'' - 2tx' + 2x = 0$ hledat ve tvar $x(t) = t^n$. Po dosazení do homogenní rovnice získáme pro n rovnici $n^2 - 3n + 2 = 0$, která má řešení $n_1 = 1$ a $n_2 = 2$. Proto je řešení homogenní rovnice

$$u(t) = C_1 t + C_2 t^2 ,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Protože se nejedná o diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, budeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice variací konstant. Předpokládáme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru $w(t) = tC_1(t) + t^2C_2(t)$, kde $C_1(t)$ z $C_2(t)$ jsou diferencovatelné funkce proměnné t. V první derivaci funkce $w(t) = tC_1'(t) + t^2C_2'(t) + C_1(t) + 2tC_2(t)$ položíme identicky

$$tC_1'(t) + t^2C_2'(t) = 0 . \tag{1}$$

Za tohoto předpokladu je $w'(t) = C_1(t) + 2tC_2(t)$, a tedy druhá derivace funkce $w(t)$ je $w''(t) = C_1'(t) + 2tC_2'(t) + 2C_2(t)$. Když dosadíme do původní rovnice, získáme, uvažujeme-li podmínku (1), pro funkce $C_1'(t)$ a $C_2'(t)$ soustavu rovnic

$$tC_1'(t) + t^2C_2'(t) = 0 , \quad t^2C_1'(t) + 2t^3C_2'(t) = t \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow C_1'(t) = -\frac{1}{t} , \quad C_2'(t) = \frac{1}{t^2} \Longrightarrow C_1(t) = -\ln t , \quad C_2(t) = -\frac{1}{t} .$$

Našli jsme tedy partikulární řešení $w(t) = -t(\ln t + 1)$. Tedy obecné řešení dané rovnice je

$$x(t) = C_1 t + C_2 t^2 - t(\ln t + 1) ,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Protože hledáme řešení, které splňuje počáteční podmínky musíme ještě určit konstanty. Z nich získáme soustavu rovnic

$$C_1 + C_2 - 1 = 0 , \quad C_1 + 2C_2 - 2 = 1 \Longrightarrow C_1 = -1 , \quad C_2 = 2 .$$

Hledané řešení je tedy

$$x(t) = 2t^2 - t(\ln t + 2) \qquad \text{pro } t \in (0, \infty) .$$

Příklad 10. V závislosti na parametrech $p, q, \omega > 0$, $q^2 - p^2 > 0$, hledejte obecné řešení diferenciální rovnice $x'' + 2px' + q^2 x = \sin \omega t$ (*tlumené kmity vynucené periodickou silou*).

Řešení:

Máme najít obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Protože se jedná o diferenciální rovnici s konstantními koeficienty budeme hledat řešení příslušné homogenní rovnice ve tvaru $\mathrm{e}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Po dosazení do homogenní rovnice $x'' + 2px' + q^2x = 0$ získáme pro λ charakteristickou rovnici $\lambda^2 + 2p\lambda + q^2 = 0$, která má kořeny $\lambda_{1,2} = -p \pm \mathrm{i}\sqrt{q^2 - p^2} = -p \pm \mathrm{i}r$, kde jsme označili $r = \sqrt{q^2 - p^2}$. Obecné řešení homogenní rovnice je tedy

$$u(t) = C_1 \mathrm{e}^{-pt} \cos rt + C_2 \mathrm{e}^{-pt} \sin rt = C\mathrm{e}^{-pt} \sin(rt + \alpha) ,$$

2. *Úloha:* Určete vzorec pro obecný tvar řešení rovnice

2a

$$x'' + x = \sin^2 t.$$

Řešení: Rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty tvaru (8.1) a její řešení budeme hledat metodou variace konstant popsanou v odstavci 8. Charakteristická rovnice příslušné homogenní rovnice je podle (6.3)

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Tato rovnice má dva ryze imaginární kořeny $\lambda_1 = \mathrm{j}$ a $\lambda_2 = -\mathrm{j}$ a podle (6.3) je obecný tvar řešení homogenní rovnice

$$u(t; c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \ t \in \mathrm{R}.$$

Partikulární řešení rovnice budeme podle (8.3) hledat ve tvaru

$$w(t) = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t, \ t \in \mathrm{R}.$$

Po dosazení do rovnice dostaneme pro hledané funkce podle (8.9) soustavu

$$\begin{aligned} c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t &= \ 0 \\ -c_1'(t) \sin t + c_2'(t) \cos t &= \ \sin^2 t, \end{aligned}$$

která má řešení $c_1'(t) = -\sin^3 t$ a $c_2'(t) = \sin^2 t \cos t$ a tudíž

$$c_1(t) = \int -\sin^3 t \mathrm{d}t = \int (-\sin t(1 - \cos^2 t))\mathrm{d}t = \cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t$$

a

$$c_2(t) = \int \sin^2 t \cos t \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\sin^3 t.$$

Pro partikulární řešení $w(t)$ dostaneme vyjádření

$$w(t) = \cos^2 t - \frac{1}{3}\cos^4 t + \frac{1}{3}\sin^4 t = \cos^2 t + \frac{1}{3}(\sin^2 t + \cos^2 t)(\sin^2 t - \cos^2 t) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{3}\cos 2t = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos 2t.$$

Podle (8.11) je obecný tvar řešení

$$x(t) = x(t; c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos 2t, \ t \in \mathrm{R}.$$

Partikulární řešení $w(t)$ se dá hledat metodou odhadu, jestliže nahradíme $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$. Porovnejte s úlohami v odstavci 7.

3. *Úloha:* Určete vzorec pro obecný tvar řešení rovnice

$$x'' - 2x' + x = \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$

Řešení: Rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty tvaru (8.1) a její řešení budeme hledat metodou variace konstant popsanou v odstavci 8. Charakteristická rovnice příslušné homogenní rovnice je podle (6.3)

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Tato rovnice má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_0 = 1$ a podle (6.6) je obecný tvar řešení homogenní rovnice

$$u(t;c_1,c_2) = c_1e^t + c_2te^t,\ t \in (-\infty,0) \text{ nebo } (0,\infty).$$

Partikulární řešení rovnice budeme podle (8.3) hledat ve tvaru

$$w(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t,\ t \in (-\infty,0) \text{ nebo } (0,\infty).$$

Po dosazení do rovnice dostaneme pro hledané funkce podle (8.9) soustavu

$$\begin{aligned} c_1'(t)e^t + c_2'(t)te^t &= 0 \\ c_1'(t)e^t + c_2'(t)(t+1)e^t &= \tfrac{e^t}{t}, \end{aligned}$$

která má řešení $c_1'(t) = -1$ a $c_2'(t) = \frac{1}{t}$ a tudíž

$$c_1(t) = \int (-1)\mathrm{d}t = -t \text{ a } c_2(t) = \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln|t|.$$

Podle (8.11) je obecný tvar řešení

$$x(t) = x(t;c_1,c_2) = c_1e^t + c_2te^t - te^t + te^t\ln|t|,\ t \in (-\infty,0) \text{ nebo } (0,\infty).$$

4. *Úloha:* Určete vzorec pro obecný tvar řešení rovnice

$$x'' + 2x' + x = 3e^{-t}\sqrt{t+1}.$$

Řešení: Rovnice je nehomogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty tvaru (8.1) a její řešení budeme hledat metodou variace konstant popsanou v odstavci 8. Charakteristická rovnice příslušné homogenní rovnice je podle (6.3)

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Tato rovnice má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_0 = -1$ a podle (6.6) je obecný tvar řešení homogenní rovnice

$$u(t;c_1,c_2) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t},\ t \in \mathrm{R}.$$

Partikulární řešení rovnice budeme podle (8.3) hledat ve tvaru

$$w(t) = c_1(t)e^{-t} + c_2(t)te^{-t},\ t \in (-1,\infty).$$

Po dosazení do rovnice dostaneme pro hledané funkce podle (8.9) soustavu

$$\begin{aligned} c_1'(t)e^{-t} + c_2'(t)te^{-t} &= 0 \\ -c_1'(t)e^{-t} + c_2'(t)(1-t)e^{-t} &= 3e^{-t}\sqrt{t+1}, \end{aligned}$$

která má řešení $c_1'(t) = -3t\sqrt{t+1}$ a $c_2'(t) = 3\sqrt{t+1}$ a tudíž

$$c_1(t) = \int(-3t\sqrt{t+1})\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{l} \sqrt{t+1} = z,\quad t = z^2 - 1 \\ \mathrm{d}t = 2z\mathrm{d}z \end{array} \right| = 6\int(z^2 - z^4)\mathrm{d}z =$$

$$= 2\sqrt{(t+1)^3} - \frac{6}{5}\sqrt{(t+1)^5},\ t \in (-1,\infty)$$

a

$$c_2(t) = \int 3\sqrt{t+1}\mathrm{d}t = 2\sqrt{(t+1)^3},\ t \in (-1,\infty).$$

Podle (8.11) je obecný tvar řešení

$$x(t) = (t;c_1,c_2) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + 2e^{-t}\sqrt{(t+1)^3} - \frac{6}{5}e^{-t}\sqrt{(t+1)^5} + 2te^{-t}\sqrt{(t+1)^3} =$$

$$= \left[c_1 + c_2t + \frac{4}{5}\sqrt{(t+1)^5}\right]e^{-t},\ t \in (-1,\infty).$$

2b

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos x} \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

- $\lambda^3 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2+1) = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_1 = i$

$\lambda_2 = -i$

$y_H = e^{0x} c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x$

$= c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x$

- $y' = \underline{c_1'} + \underline{c_2' \sin x} + c_2 \cos x + \underline{c_3' \cos x} + c_3(-\sin x)$

$c_1' + c_2' \sin x + c_3' \cos x = 0$

$y'' = c_2' \cos x + c_2(-\sin x) + c_3'(-\sin x) + c_3(-\cos x)$

$c_2' \cos x + c_3'(-\sin x) = 0$

$y''' = c_2'(-\sin x) + c_2(-\cos x) + c_3'(-\cos x) + c_3(\sin x)$

$$c_2'(-\sin x) + c_2(-\cancel{\cos x}) - c_3' \cos x + c_3 \cancel{\sin x} + c_2 \cancel{\cos x} - c_3 \cancel{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$c_2'(-\sin x) - c_3' \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & -\sin x & -\cos x & \frac{1}{\cos x} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 1 \cdot \sin x \, ! \\ 1 \cdot \cos x \, ! \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$c_3' = -1$

$c_2' = -\frac{\sin x}{\cos x}$

$c_1' = \cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x}$

$c_3 = -x + d_3$

$c_2 = \ln|\cos x| + d_2$

$c_1 = \int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + d_1$

$y = \sin x$

$dy = \cos x\,dx$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + d_1$

$\cos x \neq 0 \qquad \sin x \neq \pm 1$

celkem

$y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + d_1 + \sin x \ln|\cos x| + d_2 \sin x$

$+ \cos x \cdot (-x) + d_3 \cos x \qquad d_{1,2,3} \in \mathbb{R}$

$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

2c $y''' + y' = \tan x$ $\qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

- $\lambda^3 + \lambda = 0$ $\qquad y_H = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$

$\lambda(\lambda^2+1) = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = i \quad \lambda_3 = -i$

- $y' = c_1' + c_2' \cos x + c_2(-\sin x) + c_3' \sin x + c_3 \cos x$

$c_1' + c_2' \cos x + c_3' \sin x = 0$

$y'' = -c_2' \sin x - c_2 \cos x + c_3' \cos x - c_3 \sin x$

$-c_2' \sin x + c_3' \cos x = 0$

$y''' = -c_2' \cos x + c_2 \sin x - c_3' \sin x - c_3 \cos x$

dosazení

$-c_2' \cos x + c_2 \cancel{\sin x} - c_3' \sin x - c_3 \cancel{\cos x} - c_2 \cancel{\sin x} + c_3 \cancel{\cos x} = \tan x$

matice

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & \cos x & \sin x & 0 \\ 0 & -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & -\cos x & -\sin x & \tan x \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-\cos x) \\ \cdot \sin x \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & \cos x & \sin x & 0 \\ 0 & \cos x \sin x & -\cos^2 x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{\sin^2 x}{\cos x} \end{array}\right)$$

$c_3' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \qquad c_2' = \frac{-\sin^2 x}{\sin x} = -\sin x$

$c_1' = \cos x \sin x + \frac{\sin^3 x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$

$c_2 = \cos x + d_2$

$c_1 = -\ln|\cos x| + d_1$

$$c_3 = \int \frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x} \cos x \, dx = \int \frac{-\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \cos x \, dx =$$

$$y = \sin x$$
$$dy = \cos x \, dx$$

$$= \int \frac{-y^2}{1-y^2} dy = \int 1 - \frac{1}{1-y^2} dy = y - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| + d_3$$

$$= \sin x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + d_3$$

celkem

$$y = d_1 - \ln|\cos x| + \cos x (\cos x + d_2) + \sin x \left(\sin x + d_3 - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| \right)$$

$$x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \pi/2) + k\pi \qquad d_{1,2,3} \in \mathbb{R}$$

Příklad 1.4. *Najděme homogenní lineární diferenciální rovnici 2.řádu s konstantními koeficienty, jejíž fundamentální systém tvoří funkce* $\varphi_1(x) = \mathrm{e}^x$ *a* $\varphi_2(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.

Hledaná rovnice bude mít tvar

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{7}$$

kde a_0 a a_1 jsou neznámé konstanty. Protože $\varphi_1(x) = \mathrm{e}^x$ a $\varphi_2(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ jsou podle předpokladu řešením rovnice (7), musí platit

$$\begin{aligned} \varphi_1''(x) + \varphi_1'(x)a_1 + \varphi_1(x)a_0 &= 0, \\ \varphi_2''(x) + \varphi_2'(x)a_1 + \varphi_2(x)a_0 &= 0, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x + \quad \mathrm{e}^x\, a_1 + \ \mathrm{e}^x\, a_0 &= 0, \\ 4\,\mathrm{e}^{-2x} - 2\,\mathrm{e}^{-2x}\, a_1 + \mathrm{e}^{-2x}\, a_0 &= 0 \end{aligned}$$

a po úpravě

$$\begin{aligned} a_1 + a_0 &= -1, \\ -2a_1 + a_0 &= -4. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme $a_0 = 1$, $a_1 = -2$. Hledaná rovnice má tedy tvar

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Mohli jsme také postupovat rychleji. Tvoří-li funkce $\varphi_1(x) = \mathrm{e}^{1\cdot x}$ a $\varphi_2(x) = \mathrm{e}^{-2\cdot x}$ fundamentální systém hledané rovnice, má charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{8}$$

dva reálné kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -2$ a rovnici (8) můžeme napsat ve tvaru (polynom na levé straně napíšeme jako součin kořenových činitelů) ve tvaru

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0,$$

tj.

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Odtud pak

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

(3b)

$y_1 = e^{0x} \cos 3x$

$y_2 = e^{0x} \sin 3x$ $\rightarrow$ $\lambda_{1,2} = 0 \pm 3i$

$(\lambda - 3i)(\lambda + 3i) = 0$

$\lambda^2 + 9 = 0$

$\rightarrow \quad y'' + 9y = 0$

(3c) $y_1 = e^{2x} \sin(-x)$

$y_2 = e^{2x} \cos(-x)$ $\rightarrow$ $\lambda_{1,2} = 2 \pm (-i)$

$= 2 \mp i$

$(\lambda - 2 + i)(\lambda - 2 - i) = \lambda^2 - 2\lambda - \cancel{i\lambda} - 2\lambda + 4 - i^2 + \cancel{2i} + \cancel{i\lambda} - \cancel{2i}$

$= \lambda^2 - 4\lambda + 5$

$\rightarrow \quad y'' - 4y' + 5y = 0$

(3d) $y_1 = e^{-5x}$ $\quad y_2 = x e^{-5x}$

$\lambda_{1,2} = -5$

$(\lambda + 5)^2 = 0$

$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$

$\rightarrow \quad y'' + 10y' + 25y = 0$

(3e) $y_1 = \sin x$ $\quad y_2 = \cos 2x$

$\rightarrow$ Nemá řešení!

(4a) $h(x) = 4+3x \qquad f(x) = (1+x)^2 \qquad g(x) = 2-x-2x^2$

hledáme a, b: $\quad h = af + bg$

$$4+3x = a(1+2x+x^2) + b(2-x-2x^2)$$
$$4+3x = a+2b + x(2a-b) + x^2(a-2b)$$

$4 = a+2b \qquad 4b = 4 \quad \to b = 1$

$3 = 2a-b \qquad 3 = 4b-b \quad \Rightarrow b = 1$

$0 = a-2b \qquad a = 2b \qquad a = 2$

kontrola: $4+3x = \underline{2}+\underline{4x}+2x^2 + \underline{2}-\underline{x}-2x^2$ ✓

(4b) $h(x) = \sin(x+2) \qquad f(x) = \sin x \qquad g(x) = \cos x$

$\sin x \cos 2 + \sin 2 \cos x$

$h(x) = \cos 2 \cdot f(x) + \sin 2 \cdot g(x)$ ✓

(4c) $h(x) = x^2 \qquad f(x) = (1-x)^2 \qquad g(x) = (1+x)^2$

$x^2 = a(x^2-2x+1) + b(x^2+2x+1)$

$1 \cdot x^2 = x^2(a+b) \qquad a+b = 1$

$0x = x(-2a+2b) \qquad$ nemá řešení

$0 = a+b \qquad a+b = 0$

není lin. komb.