Algoritmus

1. Vyřešíme homogenní rovnici:
   (a) Napíšeme charakteristický polynom a najdeme kořeny.
   (b) Sestavíme řešení.
2. Zkontrolujeme, že pravá strana je ve vhodném tvaru, případně jestli není třeba součtem vhodných tvarů.
3. Použijeme Větu o Speciální pravé straně a odhadneme tvar řešení (s několika neznámými koeficienty).
4. Dosadíme do nehomogenní rovnice a dopočteme koeficienty.
5. Řešením je homogenní + dopočtené řešení.

Příklady

(1)

1. Přiřaďte funkce ke tvaru $e^{ax}(P(x)\cos(bx) + Q(x)\sin(bx))$:

(1) $12x^2 + 2x + 1$	(A) $e^{0x}((3x-1)\cos 0x + 0\sin 0x)$
(2) $3x - 1$	(B) $e^{0x}((12x^2 + 2x + 1)\cos 0x + 0\sin 0x)$
(3) $8xe^x$	(C) $e^{2x}((-2)\cos 1x + 0\sin 1x)$
(4) $-2e^{2x}\cos x$	(D) $e^{1x}((8x)\cos 0x + 0\sin 1x)$

2. Najděte řešení diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou
   (a) $y'' + y' - 6y = 12x^2 + 2x + 1$
   (b) $y'' - 3y' = 3x - 1$
   (c) $y'' + 2y' + 5y = 8xe^x$
   (d) $y'' + y = x + \sin x$
   (e) $y'' - 4y' + 5y = -2e^{2x}\cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
3. Najděte řešení diferenciálních rovnic
   (a) $y''' + 4y'' - 7y' - 10y = 100x^2 - 64e^{3x}$
   (b) $y^{iv} + 8y'' + 16y = 64x\sin 2x$
   (c) $y''' + y'' + y' + y = 8xe^x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$
   (d) $y''' + y'' - y' - y = 4\cos x$
   (e) $y''' - 4y'' + 4y' = 2x + e^{2x} - \cos 2x$
   (f) $y''' - y' + 4y = xe^{-2x}$

1.2. **Speciální pravá strana.**

(2a) **Příklad 1.5.** *Najděme obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' + y' - 6y = 12x^2 + 2x + 1 \tag{9}$$

Řešením charakteristické rovnice $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ dostaneme $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$. Odtud

$$\varphi_h(x) = c_1 \mathrm{e}^{-3x} + c_2 \mathrm{e}^{2x}.$$

O speciální pravé straně diferenciální rovnice

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{10}$$

budeme mluvit v případě, že funkce f má tvar

$$f(x) = \mathrm{e}^{ax} \left(p_1(x)\cos(bx) + p_2(x)\sin(bx)\right), \tag{11}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a p_1, p_2 jsou polynomy stupně s a r.
Hledané partikulární řešení φ_p rovnice (10) má potom tvar

$$\varphi_p(x) = \mathrm{e}^{ax} x^k \left(q_1(x)\cos(bx) + q_2(x)\sin(bx)\right), \tag{12}$$

kde q_1, q_2 jsou polynomy jejichž stupeň je maximálně rovem většímu z čísel s a r a k je násobnost kořene $\lambda = a + \mathrm{i}\, b$ charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{13}$$

V případě, že komplexní číslo $\lambda = a + \mathrm{i}\, b$ není kořenem charakteristické rovnice (13), je $k = 0$.

Pravá strana rovnice (9) má speciální tvar neboť

$$12x^2 + 2x + 1 = \mathrm{e}^{0x} \left((12x^2 + 2x + 1)\cos(0x) + 0\sin(0x)\right),$$

a komplexní číslo $\lambda = a + \mathrm{i}\, b = 0 + \mathrm{i}\, 0 = 0$ není kořenem charakteristické rovnice. Je tedy $k = 0$. Podle (12) je tedy

$$\varphi_p(x) = \mathrm{e}^{0x} x^0 \left((Ax^2 + Bx + C)\cos(0x) + q_2(x)\sin(0x)\right) = Ax^2 + Bx + C.$$

(Polynom q_2 nás nebude zajímat, neboť jej budeme násobit číslem 0.) Podle předpokladu je φ_p řešení rovnive (9). Dosazením φ_p do rovnice (9) dostaneme podmínky pro neznámé konstanty A, B, C.

$$\varphi_p'(x) = 2Ax + B, \quad \varphi_p''(x) = 2A$$

a

$$2A + 2Ax + B - 6Ax^2 - 6Bx - 6C = 12x^2 + 2x + 1.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme

$$\begin{aligned} -6A \qquad\quad &= 12, \\ 2A - 6B \quad\ &= 2, \\ 2A + B - 6C &= 1. \end{aligned}$$

Potom $A = -2$, $B = -1$, $C = -1$. Je tedy $\varphi_p(x) = -2x^2 - x - 1$ a odtud

$$\underline{\underline{\varphi(x) = c_1 \mathrm{e}^{-3x} + c_2 \mathrm{e}^{2x} - 2x^2 - x - 1,}} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(2b) **Příklad 1.6.** *Najděme obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' - 3y' = 3x - 1 \tag{14}$$

Řešením charakteristické rovnice $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ dostaneme $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$. Odtud

$$\varphi_h(x) = c_1 + c_2 \, \mathrm{e}^{3x} \, .$$

Pravá strana rovnice (14) má podobně jako v (9)speciální tvar neboť

$$3x - 1 = \mathrm{e}^{0x} \left((3x - 1) \cos(0x) + 0 \sin(0x) \right),$$

Tentokrát však komplexní číslo $\lambda = a + \mathrm{i}\, b = 0 + \mathrm{i}\, 0 = 0$ je kořenem charakteristické rovnice a to jednonásobným. Je tedy $k = 1$. Podle (12) je tedy

$$\varphi_p(x) = x^1 (Ax + B).$$

Dosazením tohoto předpokládaného řešení do rovnice (14) a porovnámím koeficientů u stejných mocnin x dostaneme $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$. Je tedy $\varphi_p(x) = -\frac{1}{2}x^2$ a

$$\underline{\underline{\varphi(x) = c_1 + c_2 \, \mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{2}x^2}}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(2c) **Příklad 1.7.** *Najděme obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' + 2y' + 5y = 8x \, \mathrm{e}^x \tag{15}$$

Řešením charakteristické rovnice $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ dostaneme $\lambda_1 = -1 + 2\mathrm{i}$, $\lambda_2 = -1 - 2\mathrm{i}$. Odtud

$$\varphi_h(x) = c_1 \, \mathrm{e}^{-x} \cos 2x + c_2 \, \mathrm{e}^{-x} \sin 2x.$$

Rovnice (15) má opět speciální pravou stranu, neboť

$$8x \, \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{1x} \left(8x \cos(0x) + 0 \sin(0x) \right),$$

přičemž $\lambda = a + \mathrm{i}\, b = 1 + \mathrm{i}\, 0 = 1$ není kořenem charakteristické rovnice. Potom

$$\varphi_p(x) = \mathrm{e}^{1x} x^0 \left((Ax + B) \cos(0x) + q_2(x) \sin(0x) \right) = (Ax + B) \, \mathrm{e}^x \, .$$

Dosazením tohoto předpokládaného řešení do rovnice (15) (a po úpravě), dostaneme porovnáním koeficientů u stejných mocnin x $A = 1$, $B = -\frac{1}{2}$. Je tedy $\varphi_p(x) = \mathrm{e}^x \left(x - \frac{1}{2} \right)$ a

$$\underline{\underline{\varphi(x) = c_1 \, \mathrm{e}^{-x} \cos 2x + c_2 \, \mathrm{e}^{-x} \sin 2x + \mathrm{e}^x \left(x - \frac{1}{2} \right)}}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(2d) **Příklad 1.8.** *Najděme obecné řešení diferenciální rovnice*

$$y'' + y = x + \sin x \tag{16}$$

Řešením charakteristické rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ dostaneme $\lambda_{12} = \pm \mathrm{i}$. Odtud

$$\varphi_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Rovnice (16) tentokrát nemá speciální pravou stranu. Pravá strana této rovnice je však dána jako součet dvou funkcí, znichž každá má tvar speciální pravé strany. Dále víme, že je-li φ_{p1} partikulární řešení rovnice

$$y'' + y = x \tag{17}$$

a φ_{p2} partikulární řešení rovnice

$$y'' + y = \sin x \tag{18}$$

je $\varphi_p = \varphi_{p1} + \varphi_{p2}$ partikulární řešení rovnice (16).

Analogickým postupem jako u rovnice (9) dostaneme $\varphi_{p1}(x) = x$. Pro rovnici (18) pak platí

$$\sin x = \mathrm{e}^{0x} \left(0 \cos(1x) + 1 \sin(1x) \right),$$

přičemž $\lambda = a + \mathrm{i}\, b = 0 + \mathrm{i}\, 1 = \mathrm{i}$ je kořenem charakteristické rovnice a to jednonásobným. Potom

$$\varphi_{p2}(x) = \mathrm{e}^{0x}\, x^1 \left(A \cos(1x) + B \sin(1x) \right) = x(A \cos x + B \sin x).$$

Dosazením tohoto předpokládaného řešení do rovnice (18) (a po úpravě), dostaneme porovnáním koeficientů u funkcí $\sin x$ a $\cos x$ $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$. Je tedy $\varphi_{p2}(x) = -\frac{1}{2} x \cos x$ a $\varphi_p(x) = x - \frac{1}{2} x \cos x$ Odtud

$$\underline{\underline{\varphi(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x - \frac{1}{2} x \cos x,}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(2e) $y'' - 4y' + 5y = -2e^{2x}\cos x \qquad y(0)=0, \quad y'(0)=0$

- $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm i$

$y = c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x}\sin x$

$x \in \mathbb{R} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- $-2e^{2x}\cos x = e^{2x}(-2\cdot\cos 1x + 0\cdot\sin 1x)$

$2+i$ je 1-nás. kořen

$y_p = x^1 e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$

$y_p' = e^{2x}(\sin x(-Ax + 2Bx + B) + \cos x\,(2Ax + A + Bx))$

$y_p'' = e^{2x}(\sin x(3Bx + 4B - 4Ax - 2A) + \cos x\,(3Ax + 4A + 4Bx + 2B))$

dosazení

$e^{2x}\Big(\sin x\,[\cancel{3Bx} - \cancel{4Ax} + \cancel{4B} - 2A + \cancel{4Ax} - \cancel{8Bx} - \cancel{4B} + \cancel{5Bx}]$

$+ \cos x\,[\cancel{3Ax} + \cancel{4A} + \cancel{4Bx} + 2B - \cancel{8Ax} - \cancel{4A} - \cancel{4Bx} + \cancel{5Ax}]\Big) = -2e^{2x}\cos x$

$e^{2x}\sin x: \quad -2A = 0$

$e^{2x}\cos x: \quad 2B = -2$

$\Big\} \quad B = -1, \quad A = 0$

$y_p = x e^{2x}(-\sin x) \quad x \in \mathbb{R}$

$y = c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x}\sin x + x e^{2x}(-\sin x) \quad x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y' = c_1 2e^{2x}\cos x + c_1 e^{2x}(-\sin x) + c_2 2e^{2x}\sin x + c_2 e^{2x}\cos x + e^{2x}(-\sin x)$
$+ x\,(2e^{2x}(-\sin x) + e^{2x}(-\cos x))$

$1 = y(0) = c_1 \qquad 0 = y'(0) = 2c_1 + c_2 \rightarrow c_2 = -2$

$\boxed{y = e^{2x}\cos x - 2e^{2x}\sin x + x e^{2x}(-\sin x) \quad x \in \mathbb{R}}$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty. Protože řešíme diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, pravá strana nehomogenní rovnice $b(t) = t^2$ je polynom stupně 2 a 0 není kořenem charakteristické rovnice, budeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru $w(t) = at^2 + bt + c$. Když dosadíme funkci $w(t)$ do dané nehomogenní rovnice dostaneme pro konstanty a, b a c rovnice

$$2a - 4(2at + b) + 5(at^2 + bt + c) = 5at^2 + (5b - 8a)t + 5c - 4b + 2a = t^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 5a = 1\,,\quad 5b - 8a = 0\,,\quad 5c - 4b + 2a = 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{5}\,,\quad b = \frac{8}{25}\,,\quad c = \frac{22}{125}\,.$$

Tedy partikulární řešení nehomogenní rovnice je $w(t) = \dfrac{1}{5}\,t^2 + \dfrac{8}{25}\,t + \dfrac{22}{125}$ a obecné řešení dané rovnice je

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{2t} \cos t + C_2 \mathrm{e}^{2t} \sin t + \frac{1}{5}\,t^2 + \frac{8}{25}\,t + \frac{22}{125}\,,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

3a

Příklad 3. Najděte řešení diferenciální rovnice $x''' + x'' + x' + x = 8t\mathrm{e}^t$, které vyhovuje počátečním podmínkám $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$.

Řešení:
Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici třetího řádu. Proto nejprve najdeme řešení homogenní rovnice $x''' + x'' + x' + x = 0$. Protože je to lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, budeme hledat řešení ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Když dosadíme tuto funkci do homogenní rovnice, dostaneme pro λ charakteristickou rovnici

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda + 1)(\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})\,.$$

Tedy charakteristická rovnice má tři kořeny $\lambda_1 = -1$. $\lambda_{2,3} = \pm\mathrm{i}$, které jsou všechny násobnosti 1. Proto je fundamentální systém řešení $u_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$, $u_2(t) = \cos t$, $u_3(t) = \sin t$ a obecné řešení homogenní rovnice je

$$u(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t\,,$$

kde C_1, C_2 a C_3 jsou libovolné konstanty. Protože máme rovnici s konstantními koeficienty a pravá strana má speciální tvar, budeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice odhadem. Protože 1 není kořenem charakteristické rovnice má partikulární řešení nehomogenní rovnice tvar $w(t) = (at + b)\mathrm{e}^t$. Derivace této funkce jsou $w'(t) = (at + a + b)\mathrm{e}^t$, $w''(t) = (at + 2a + b)\mathrm{e}^t$, $w'''(t) = (at + 3a + b)\mathrm{e}^t$. Když dosadíme do nehomogenní rovnice, získáme pro konstanty a a b vztahy

$$4at + 6a + 4b = 8t \Longrightarrow 4a = 8\,,\quad 6a + 4b = 0 \Longrightarrow a = 2\,,\quad b = -3\,.$$

Tedy partikulární řešení nehomogenní rovnice je $w(t) = (2t - 3)\mathrm{e}^t$ a její obecné řešení je

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t + (2t - 3)\mathrm{e}^t\,,$$

kde C_1, C_2 a C_3 jsou libovolné konstanty. Ty musíme určit tak, aby řešení splňovalo počáteční podmínky. Když dosadíme tyto podmínky do obecného řešení, získáme pro konstanty C_1, C_2 a C_3 soustavu tří lineárních algebraických rovnic

$$C_1 + C_2 - 3 = 1\,,\quad -C_1 + C_3 - 1 = 1\,,\quad C_1 - C_2 + 1 = 1 \Longrightarrow C_1 = C_2 = 2\,,\quad C_3 = 4\,.$$

Hledané řešení diferenciální rovnice je tedy

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 2\cos t + 4\sin t + (2t - 3)\mathrm{e}^t\,.$$

Example 5: Solve $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 64t\sin(2t)$.

Solution: First, solve the corresponding homogeneous equation

$$y_c^{(4)} + 8y_c'' + 16y_c = 0.$$

This was done in Example 2. The complementary solutions are

$$y_c = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + C_3 t\cos(2t) + C_4 t\sin(2t),$$

where C_1, C_2, C_3, C_4 are free parameters.

Next, set up a trial form for a particular solution:

$$y_p = t^2(a_0 + a_1 t)\cos(2t) + t^2(b_0 + b_1 t)\sin(2t).$$

Notice that this is the resonant case and the correcting term t^2 is needed. Plug y_p in the nonhomogeneous equation and simplify:

$$(-32a_0 + 48b_1 - 96a_1 t)\cos(2t) + (-48a_1 - 32b_0 - 96b_1 t)\sin(2t) = 64t\sin(2t).$$

Compare the coefficients of the two sides:

$$\begin{aligned} -32a_0 + 48b_1 &= 0, \\ -96a_1 &= 0, \\ -48a_1 - 32b_0 &= 0, \\ -96b_1 &= 64. \end{aligned}$$

Solving this we obtain:

$$a_0 = -1, a_1 = 0, b_0 = 0, b_1 = -2/3.$$

Therefore, the general solutions of the nonhomogeneous equation are

$$y = y_p + y_c = -t^2\cos(2t) - \frac{2}{3}t^3\sin(2t) + C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + C_3 t\cos(2t) + C_4 t\sin(2t),$$

where C_1, C_2, C_3, C_4 are free parameters.

(3c)

$y''' - 2y' + 4y = x e^{-2x}$

Řešení
Hledáme obecný tvar řešení nehomogenní rovnice s kvázipolynomiální pravou stranou typu (2.54). Nejdříve najdeme fundamentální systém řešení příslušné homogenní rovnice. Charakteristická rovnice $\lambda^3 - 2\lambda + 4 = 0$ má tři jednoduché kořeny $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1 + \mathrm{i}$, $\lambda_3 = 1 - \mathrm{i}$, a tedy fundamentální systém je tvořen funkcemi e^{-2t}, $\mathrm{e}^t \cos t$, $\mathrm{e}^t \sin t$. Jelikož koeficient $\sigma = -2$ v exponentu pravé strany je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice, hledáme partikulární řešení $w(t)$ podle (2.56) ve tvaru

$$w(t) = t(at + b)\mathrm{e}^{-2t} = (at^2 + bt)\mathrm{e}^{-2t} . \tag{2.64}$$

Vypočteme první, druhou a třetí derivaci funkce $w(t)$ a dosadíme do rovnice (2.63). Po jednoduché úpravě dostaneme rovnost

$$(20at - 12a + 10b)\mathrm{e}^{-2t} = t\mathrm{e}^{-2t} .$$

Zkrátíme exponenciální funkcí a porovnáme koeficienty u stejných mocnin. Dostaneme rovnice $12a - 10b = 0$, $20a = 1$. Je tedy $a = \frac{1}{20}$, $b = \frac{3}{50}$. Dosadíme do (2.64) a dostaneme partikulární řešení

$$w(t) = \frac{1}{100}(6t + 5t^2)\mathrm{e}^{-2t} , \quad t \in \mathbf{R} .$$

Obecným tvarem řešení rovnice (2.63) je tedy tříparametrický systém funkcí

$$v(t; c_1, c_2, c_3) = c_1 \mathrm{e}^{-2t} + c_2 \mathrm{e}^t \cos t + c_3 \mathrm{e}^t \sin t + \frac{1}{100}(6t + 5t^2)\mathrm{e}^{-2t} , \quad t, c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R} .$$

3. Máme najít obecný tvar řešení rovnice

$$\ddot{x} - \dot{x} = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} + t . \tag{2.65}$$

Řešení
Hledáme obecný tvar řešení nehomogenní rovnice s kvázipolynomiální pravou stranou typu (2.57) s $s = 3$, $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 0$. Nejdříve najdeme fundamentální systém řešení příslušné homogenní rovnice. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - \lambda = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, a tedy fundamentální systém je tvořen funkcemi 1 a e^t. Exponenty $\sigma_1 = 1$ a $\sigma_3 = 0$ jsou jednoduchými charakteristickými hodnotami, takže partikulární řešení $w(t)$ hledáme podle (2.60) ve tvaru

$$w(t) = ta\mathrm{e}^t + b\mathrm{e}^{2t} + t(ct + d) . \tag{2.66}$$

Vypočteme první a druhou derivaci funkce $w(t)$ a dosadíme do rovnice (2.65). Po jednoduché úpravě dostaneme rovnost

$$(a - 1)\mathrm{e}^t + (2b - 1)\mathrm{e}^{2t} - (2c + 1)t - d + 2c = 0 . \tag{2.67}$$

Jelikož funkce e^t, e^{2t}, t, 1 jsou lineárně nezávislé, musí být koeficienty v lineární kombinaci (2.67) vesměs nulové. Je tedy $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2}$, $d = -1$. Dosadíme do (2.66) a dostaneme partikulární řešení

$$w(t) = t\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2}t^2 - t , \quad t \in \mathbf{R} .$$

Obecným tvarem řešení rovnice (2.65) je tedy dvouparametrický systém funkcí

$$v(t; c_1, c_2) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2}t^2 - t , \quad t, c_1, c_2 \in \mathbf{R} .$$

Úlohy

1. Uveďte, v jakém tvaru budete hledat partikulární řešení následujících rovnic.

   (a) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 3t^3 + 8t$. [$w(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$.]

   (b) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = t\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-t}$. [$w(t) = t(at + b)\mathrm{e}^{2t} + c\mathrm{e}^{-t}$.]

   (c) $\dddot{x} + \ddot{x} = 1 - 2t + t\mathrm{e}^{-t}$. [$w(t) = t^2(at + b) + t(ct + d)\mathrm{e}^{-t}$.]

Nyní již y_h a y_p nemají společný žádný člen, tedy tento tvar je definitivní. Dále

$$y_p' = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x,$$

takže

$$y_p'' = -2A\sin x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\sin x\,.$$

Dosazením výrazů pro y_p'' a y_p do řešené rovnice dostaneme

$$-2A\sin x + 2B\cos x = 2\sin x\,.$$

Tedy $A = -1$, $B = 0$ a hledané partikulární řešení má tvar

$$y_p = -x\cos x\,.$$

Pak obecné řešení je tvaru

$$y = y_h + y_p = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 6.13. Řešte rovnici

$$y'' + 4y' + 4y = 2\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Řešení. I. Homogenní rovnice

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

má charakteristickou rovnici $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ s dvojnásobným kořenem $\lambda_{1,2} = -2$. Tedy

$$y_h = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

II. Přistoupíme k určení y_p. Protože $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, budeme řešení y_p předpokládat nejprve ve tvaru $y_p = A\,\mathrm{e}^{-2x}$. Tento člen je však obsažen v y_h jako $C_1\,\mathrm{e}^{-2x}$ (označení konstanty zde není podstatné). Vynásobíme proto tento tvar faktorem x, čímž dostáváme $Ax\,\mathrm{e}^{-2x}$. I tento výraz je však zahrnut v y_h (jako $C_2x\,\mathrm{e}^{-2x}$). Opakované násobení x dává

$$y_p = Ax^2\,\mathrm{e}^{-2x}, \qquad A = ?$$

Teprve toto vyjádření y_p lze považovat za konečné (tento člen již není součástí y_h). Odtud derivací dostáváme

$$y_p' = 2Ax\,\mathrm{e}^{-2x} - 2Ax^2\,\mathrm{e}^{-2x} = A(2x - 2x^2)\,\mathrm{e}^{-2x},$$

$$y_p'' = A(2 - 4x)\,\mathrm{e}^{-2x} - 2A(2x - 2x^2)\,\mathrm{e}^{-2x} = A(2 - 8x + 4x^2)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Dosazením y_p, y_p', y_p'' do dané rovnice máme

$$A(2 - 8x + 4x^2)\,\mathrm{e}^{-2x} + 4A(2x - 2x^2)\,\mathrm{e}^{-2x} + 4x^2\,\mathrm{e}^{-2x} = 2\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Po zkrácení nenulovou funkcí e^{-2x} máme

$$A(2 - 8x + 4x^2 + 8x - 8x^2 + 4x^2) = 2 \qquad \text{tj.} \qquad 2A = 2, \quad A = 1.$$

Odtud $y_p = x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$ a obecné řešení je tvaru

$$y = y_h + y_p = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 + C_2x + x^2), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(301)

Příklad 6.14. Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 4y'' + 4y' = 2x + \mathrm{e}^{2x} - \cos 2x.$$

Řešení. Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici 3. řádu s konstantními koeficienty a pravou stranou $f(x) = 2x + \mathrm{e}^{2x} - \cos 2x$.

3d

I. Nalezneme řešení homogenní rovnice

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0.$$

Charakteristickou rovnici

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

řešíme vytknutím λ a dostáváme reálné kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 2$. Tedy $y_1 = 1$, $y_2 = \mathrm{e}^{2x}$, $y_3 = x\,\mathrm{e}^{2x}$ a odtud

$$y_h = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{2x} + C_3 x\,\mathrm{e}^{2x}.$$

II. Protože $f(x) = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)$, kde $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $f_3(x) = \cos 2x$, lze pomocí principu superpozice řešit danou rovnici postupně s pravými stranami $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, čímž obdržíme partikulární řešení y_{p_1}, y_{p_2}, y_{p_3}. Hledané partikulární řešení y_p pak bude tvaru $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} - y_{p_3}$.

a) Hledáme partikulární řešení y_{p_1} diferenciální rovnice

$$y''' - 4y'' + 4y' = 2x$$

s pravou stranou $f_1(x) = 2x$. K tomuto účelu použijeme metodu neurčitých koeficientů. Ježto $f_1(x)$ je polynom 1. stupně, zkusíme předpokládat hledané řešení ve tvaru $y_{p_1} = Ax + B$. Je ovšem snadné vidět, že druhý člen tohoto tvaru (totiž konstanta B) je obsažen v řešení y_h (zde vystupuje jako člen také konstanta, označená jako C_1). Proto tento tvar vynásobíme x a dostáváme

$$y_{p_1} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx, \qquad A,\ B = ?$$

Poněvadž Ax^2 ani Bx již nejsou součástí y_h, lze tento tvar považovat za správný. Derivací dostáváme

$$y'_{p_1} = 2Ax + B, \qquad y''_{p_1} = 2A, \qquad y'''_{p_1} = 0.$$

Dosazením pak máme

$$0 - 8A + 4(2Ax + B) = 2x, \qquad \text{tj.} \qquad 8Ax - 8A + 4B = 2x.$$

Porovnáním koeficientů u x^1 a x^0 pak dostáváme $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$. Tedy

$$y_{p_1} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

b) Hledáme partikulární řešení y_{p_2} diferenciální rovnice

$$y''' - 4y'' + 4y' = \mathrm{e}^{2x}$$

s pravou stranou $f_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Opět můžeme využít metody neurčitých koeficientů, protože $f_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Hledané řešení tedy zkusíme předpokládat ve tvaru $y_{p_2} = A\,\mathrm{e}^{2x}$. Tento člen je však obsažen v y_h jako $C_1\,\mathrm{e}^{2x}$. Vynásobíme-li tento tvar faktorem x, dostáváme $Ax\,\mathrm{e}^{2x}$. I tento výraz je ovšem zahrnut v řešení y_h (jako $C_2 x\,\mathrm{e}^{2x}$). Opětovné násobení x dává

$$y_{p_2} = Ax^2\,\mathrm{e}^{2x}, \qquad A = ?$$

Teprve toto vyjádření lze považovat za konečné (daný člen již není součástí y_h). Derivací tohoto tvaru a následnou úpravou postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
y'_{p_2} &= A(2x\,\mathrm{e}^{2x} + x^2 2\,\mathrm{e}^{2x}) = 2A(x^2 + x)\,\mathrm{e}^{2x},\\
y''_{p_2} &= 2A[(2x+1)\,\mathrm{e}^{2x} + (x^2 + x)2\,\mathrm{e}^2 x] = 2A(2x^2 + 4x + 1)\,\mathrm{e}^{2x},\\
y'''_{p_2} &= 2A[(4x+4)\,\mathrm{e}^{2x} + (2x^2 + 4x + 1)2\,\mathrm{e}^{2x}] = 4A(2x^2 + 6x + 3)\,\mathrm{e}^{2x}.
\end{aligned}$$

Dosazením máme

$$4A(2x^2 + 6x + 3)\,\mathrm{e}^{2x} - 8A(2x^2 + 4x + 1)\,\mathrm{e}^{2x} + 8A(x^2 + x) = \mathrm{e}^{2x}.$$

Po vykrácení e^{2x} a vytknutí neznámé A na levé straně dostáváme $A = \frac{1}{4}$. Tedy

$$y_{p_2} = \frac{1}{4}x^2\,\mathrm{e}^{2x}.$$

(3d)

c) Hledáme partikulární řešení y_{p_3} diferenciální rovnice

$$y''' - 4y'' + 4y' = \cos 2x$$

s pravou stranou $f_3(x) = \cos 2x$. Podle metody neurčitých koeficientů lze hledané řešení předpokládat ve tvaru

$$y_{p_3} = A\cos 2x + B\sin 2x \qquad A,\, B = ?$$

Všimněme si, že tentokrát nemusíme tento tvar násobit x, neboť žádný ze sčítanců se v y_h nevyskytuje. Derivací dostáváme

$$y'_{p_3} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \qquad y''_{p_3} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x,$$
$$y'''_{p_3} = 8A\sin 2x - 8B\cos 2x.$$

Dosazením máme

$$8A\sin 2x - 8B\cos 2x + 16A\cos 2x + 16B\sin 2x - 8A\sin 2x + 8B\cos 2x = \cos 2x,$$

$$16B\sin 2x + 16A\cos 2x = \cos 2x.$$

Porovnáním koeficientů u $\sin 2x$ a $\cos 2x$ pak dostáváme $B = 0$, $A = \frac{1}{16}$. Tedy

$$y_{p_3} = \frac{1}{16}\cos 2x.$$

Hledané partikulární řešení y_p dané rovnice je proto tvaru

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} - y_{p_3} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{16}\cos 2x$$

a pro obecné řešení y této diferenciální rovnice pak platí

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{2x} + C_3 x\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{4}x\left(x + 2 + x\,\mathrm{e}^{2x}\right) - \frac{1}{16}\cos 2x, \qquad C_1,\, C_2,\, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 6.15. Nalezněte obecné řešení

$$y'' - y' - 2y = \cosh 2x.$$

Řešení. I. Homogenní rovnice $y'' - y' - 2y = 0$ má obecné řešení

$$y_h = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

II. Pravou stranu $f(x)$ píšeme ve tvaru

$$f(x) = \cosh 2x = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}:$$

a)$f_1(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$, odkud $y_{p_1} = Ax\,\mathrm{e}^{2x}$, $A = ?$ Výpočtem $y'_{p_1} = A(1+2x)\,\mathrm{e}^{2x}$, $y''_{p_1} = A(4+4x)\,\mathrm{e}^{2x}$ a dosazením do rovnice

$$y'' - y' - 2y = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$$

máme $3A = \frac{1}{2}$, tj. $A = \frac{1}{6}$ a $y_{p_1} = \frac{1}{6}x\,\mathrm{e}^{2x}$.
b)$f_2(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}$, odkud $y_{p_2} = A\,\mathrm{e}^{-2x}$, $A = ?$ Protože $y'_{p_2} = -2A\,\mathrm{e}^{-2x}$, $y''_{p_2} = 4A\,\mathrm{e}^{-2x}$, dostáváme po dosazení do

$$y'' - y' - 2y = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x},$$

$4A = \frac{1}{2}$, tj. $A = \frac{1}{8}$ a $y_{p_2} = \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-2x}$. Obecné řešení dané rovnice je pak tvaru

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{6}x\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-2x}, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3e

Example 3. Solve the DE

$$y''' + y'' - y' - y = 4\cos t\,.$$

Step 1. Using the method from Section 5.2 we obtain $y_h(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3te^{-t}$.
Step 2. In this exercise, $g(t) = 4e^{0t}\cos t$ and $\alpha + i\beta = i$, which is not a solution of the the characteristic equation. So, we search $y_p(t)$ in the form

$$y_p(t) = a\cos t + b\sin t\,.$$

By substituting $y_p(t)$ into the DE and grouping the similar terms we get that

$$(2a - 2b)\sin t + (-2a - 2b)\cos t = 4\cos t\,,$$

which leads to the system

$$\begin{cases} 2a - 2b &= 0 \\ -2a - 2b &= 4\,. \end{cases}$$

This gives $a = b = -1$ and therefore $y_p(t) = -\cos t - \sin t$.
Step 3. The final form of the solution is

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3te^{-t} - \cos t - \sin t\,.$$

The superposition principle:
This method works just in the case of linear DEs. If the right hand side is the sum of k functions,

$$g(t) = g_1(t) + \cdots + g_k(t)\,,$$

then we search the particular solution as

$$y_p(t) = y_{p1}(t) + \cdots + y_{pk}(t)\,,$$

where each function is a particular solution of the corresponding term of the right hand side.

Example 4.. Consider the linear DE:

$$y'' + 4y = te^t - 24e^{2t}\,.$$

Step 1. Solving the homogeneous equation gives $y_h(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$.
Step 2. We search the particular solution in the form $y_p(t) = (at+b)e^t + de^{2t}$. By substituting $y_p(t)$ into the DE we get

$$(5at + 5b + 2a)e^t + 8de^{2t} = te^t - 24e^{2t}\,,$$

which gives the system

$$\begin{cases} 5a &= 1 \\ 5b + 2a &= 0 \\ 8d &= -24\,. \end{cases}$$

Hence, $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{2}{25}$, $d = -3$ and $y_p(t) = (\frac{1}{5}t - \frac{2}{25})e^t - 3e^{2t}$.
Step 3. The final form of the solution is

$$y(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + (\frac{1}{5}t - \frac{2}{25})e^t - 3e^{2t}\,.$$

Example 4: (a) Solve $y''' + 4y'' - 7y' - 10y = 100t^2 - 64e^{3t}$.
(b) Solve $y''' + 4y'' - 7y' - 10y = 100t^2 - 64e^{3t}, y(0) = -20, y'(0) = -29/5, y''(0) = 19/5$.

Solution: (a) First, solve the corresponding homogeneous equation

$$y_c''' + 4y_c'' - 7y_c' - 10y_c = 0.$$

This was done in Example 1. The complementary solutions are

$$y_c = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-5t},$$

where C_1, C_2, C_3 are free parameters.

Next, set up a trial function by copying the structure of $f(t)$:

$$y_p = a_0 + a_1t + a_2t^2 + be^{3t}.$$

Substitute this into the nonhomogeneous equation and simplify:

$$(-10a_0 - 7a_1 + 8a_2) + (-10a_1 - 14a_2)t - 10a_2t^2 + 32be^{3t} = 100t^2 - 64e^{3t}.$$

Compare the coefficients of the two sides:

$$\begin{aligned} -10a_0 - 7a_1 + 8a_2 &= 0, \\ -10a_1 - 14a_2 &= 0, \\ -10a_2 &= 100, \\ 32b &= -64. \end{aligned}$$

Solving this linear system we obtain

$$a_0 = -89/5, a_1 = 14, a_2 = -10, b = -2,$$

and thus

$$y_p = -\frac{89}{5} + 14t - 10t^2 - 2e^{3t}.$$

The general solutions to the nonhomogeneous equation are

$$y = y_p + y_c = -\frac{89}{5} + 14t - 10t^2 - 2e^{3t} + C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-5t},$$

where C_1, C_2, C_3 are free parameters.

(b) Examine the initial conditions:

$$\begin{aligned} &C_1 + C_2 + C_3 - \frac{89}{5} - 2 = -20, \\ &-C_1 + 2C_2 - 5C_3 + 14 - 6 = -\frac{29}{5}, \\ &C_1 + 4C_2 + 25C_3 - 20 - 18 = \frac{19}{5}. \end{aligned}$$

Solve this for C_1, C_2, C_3:

$$C_1 = -\frac{1}{5}, C_2 = -2, C_3 = 2.$$

Therefore, the solution of the initial value problem is

$$y = -\frac{89}{5} + 14t - 10t^2 - 2e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-t} - 2e^{2t} + 2e^{-5t}.$$

(4)

(1) $y''' + y'' + y = e^x$	(A) Ae^x
(2) $y''' + y'' - 2y = (x+1)e^x$	(B) $x(Ax+B)e^x$
(3) $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$	(C) Ax^3e^{-x}
(4) $y''' + y'' = x^3 + x^2$	(D) $x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$
(5) $y'' + y' + y = e^x \cos x$	(E) $e^x(A\cos x + B\sin x)$
(6) $y'' - y' + y = \cos x - \sin x$	(F) $A\cos x + B\sin x$
(7) $y''' - 2y'' + 5y' = 2e^x \sin 2x$	(G) $xe^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$

Zkouškové příklady

5. Najděte řešení diferenciálních rovnic

   (a) $y^{(4)} - y = x^2$

   (b) $y^{(4)} - 10y'' + 25y = 1 + \sin x$

   (c) $y''' + y' + 2y = xe^x$

   (d) $y''' + 4y' - 6y = 10x\sin x$

   (e) $y^{(4)} - 2y''' + y' = \sin x + x\cos x$

Bonus

6. Najděte řešení ODR

   (a) $y'' = -y$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$

   (b) $y'' = -y$, $y(0) = 2, y'(0) = -3$

   (c) $y'' = -y$, $y(0) = 0, y'(\pi) = 0$

   (d) $y'' = -y$, $y(0) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

7. V závislosti na parametru $r \in \mathbb{R}$ najděte FSŘ diferenciální rovnice

$$y'' + ry = 0.$$

8. V závislosti na konstantách $p, q > 0$ najděte FSŘ diferenciální rovnice

$$y'' + 2py' + q^2y = 0.$$

9. Proč se malé dítě na pružinové houpačce (zvířátko na pružině) houpe rychleji než dospělý? Pohyb je popsán rovnicí $my'' + ky = 0$, kde m je hmotnost houpajícího se člověka a k charakterizuje pružinu.

(5a) $y^{(4)} - y = x^2$

- $\lambda^4 - 1 = 0$

$(\lambda^2-1)(\lambda^2+1) = 0$

$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-i)(\lambda+i) = 0$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = 0+1i$

$\lambda_4 = 0-1i$

$y_H = e^x \cdot c_1 + c_2 e^{-x}$

$+ c_3 e^{0x} \cos 1x + c_4 e^{0x} \sin 1x$

$= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

$c_{1-4}, x \in \mathbb{R}$

- PS $\quad x^2 = e^{0x}(x^2 \cos 0x + 0 \sin 0x)$

$0+0i$ není kořen $\quad$ max st $= 2$

$y_p = Ax^2 + Bx + C$

$y_p' = 2Ax + B$

$y_p'' = 2A$

$y_p''' = y_p^{IV} = 0$

dosazení

$0 - (Ax^2 + Bx + C) = 1x^2 + 0x + 0$

$\rightarrow A = -1 \qquad B = 0 = C$

$y_p = -x^2$

$y = y_H + y_p$

(5b) $y^{(4)} - 10y'' + 25y = 1 + \sin x$

- $\lambda^4 - 10\lambda^2 + 25 = 0$

$(\lambda^2 - 5)^2 = 0$

$(\lambda - \sqrt{5})^2(\lambda + \sqrt{5})^2 = 0$

2-náš $\lambda_1 = \sqrt{5}$

2-náš $\lambda_2 = -\sqrt{5}$

$$\underline{y_H = C_1 e^{x\sqrt{5}} + C_2 x e^{x\sqrt{5}} + C_3 e^{-x\sqrt{5}} + C_4 x e^{-x\sqrt{5}}}$$

- je treba to rozdělit:
- PS = 1 $\qquad 1 = e^{0x}(1 \cdot \cos 0x + 0 \cdot \sin 0x)$

$0 + 0i$ není kořen

max náš = 0

$y_{p_1} = A$

$y'_{p_1} = 0$

pak $\quad 25A = 1 \qquad A = 1/25 \qquad \underline{y_{p_1} = \frac{1}{25}}$

- PS = $\sin x$ $\qquad \sin x = e^{0x}(0 \cos x + 1 \cdot \sin x)$

$0 + 1i$ není kořen

$y_{p_2} = A\cos x + B \sin x$

$y'_{p_2} = -A \sin x + B \cos x$

$y''_{p_2} = -A \cos x - B \sin x$

$y'''_{p_2} = A \sin x - B \cos x$

$y^{(4)}_{p_2} = A \cos x + B \sin x$

dosazení: $\quad \cos x\,[A + 10A + 25A] + \sin x\,[B + 10B + 25B] = 1 \sin x + 0 \cos x$

$\to \quad A = 0 \qquad B = 1/36 \qquad y_{p_2} = \frac{1}{36} \sin x$

celkem $\quad \underline{y = y_H + y_{p_1}} + y_{p_2} \qquad x, C_{1-4} \in \mathbb{R}$

(5c) $y''' + 2y'' + y' + 2y = xe^x$

· $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$ $\qquad y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$

$\lambda_1 = -2$ dělení polynomů:

$(\lambda+2)(\lambda^2+1) = 0$

$(\lambda+2)(\lambda+i)(\lambda-i) = 0$

$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = 0 + 1i$

$\lambda_3 = 0 - 1i$

· PS $\qquad xe^x = e^{1x}(x \cos 0x + 0 \sin 0x)$

$1+0i$ není kořen $\qquad st = 1$

$y_p = (Ax+B)e^x$

$y_p' = e^x(A + Ax + B)$

$y_p'' = e^x(2A + Ax + B)$

$y_p''' = e^x(3A + Ax + B)$

dosazení:

$e^x[3A + Ax + B + 4A + 2Ax + 2B + A + Ax + B + 2Ax + 2B] = 1xe^x$

$e^x[8A + 6Ax + 6B] = 1xe^x$

$A = 1/6$

$8A + 6B = 0 \qquad 6B = -\frac{8}{6} \qquad B = -\frac{2}{9}$

$y_p = \left(\frac{x}{6} - \frac{2}{9}\right)e^x$

$y = y_h + y_p$

(5a) $y''' + 4y'' + y' - 6y = 10x \sin x$

- $\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ $y_H = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$

$\lambda = 1$ dělení polynomů

$\rightarrow (\lambda - 1)(x + 2)(x + 3) = 0$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -3$

- P_S : $10x \sin x = e^{0x}(0 \cos x + 10x \sin 1x)$

$0 + i$ není kořen

$st = 1$

$y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$

$y_p' = \cos x\,(A + Cx + D) + \sin x\,(C - Ax - B)$

$y_p'' = \cos x\,(-Ax - B + 2C) + \sin x\,(-Cx - 2A - D)$

$y_p''' = \cos x\,(-Cx - 3A - D) + \sin x\,(Ax + B - 3C)$

dosazení:

$\cos x\,[-\cancel{Cx} - 3A - \cancel{D} - 4Ax - 4B + 8C + A + \cancel{Cx} + \cancel{D} - 6Ax - 6B]$

$+ \sin x\,[\cancel{Ax} + \cancel{B} - 3C - 4Cx - 8A - 4D + C - \cancel{Ax} - \cancel{B} - 6Cx - 6D] = 10x \sin x$

$\cos x$: $-3A - 4B + 8C - 6B + A = 0$ $-10B - 8 = 0$ $B = \frac{-4}{5}$

$x \cos x$: $-4A - 6A = 0$ $\rightarrow A = 0$

$\sin x$: $-3C - 8A - 4D + C - 6D = 0$ $-10D + 2 = 0$

$x \sin x$: $-4C - 6C = 10$ $\rightarrow C = -1$ $D = \frac{1}{5}$

$y_p = -\frac{4}{5}\cos x + (-x + \frac{1}{5})\sin x$

$y = y_H + y_P$

(5e)

$$y^{(4)} - 2y''' + y'' = \sin x + x\cos x$$

- $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$

$\lambda^2(\lambda - 1)^2 = 0$

2-nás. $\lambda_1 = 0$

2-nás. $\lambda_2 = 1$

$y_H = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 e^{1x} + c_4 x e^{1x}$

$y_H = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x$

$x \in \mathbb{R}$

- PS:

$\sin x + x\cos x = e^{0x}(x \cdot \cos 1x + 1 \cdot \sin 1x)$

číslo $0 + 1i$ není kořen

st. polynomů - max 1

$y_P = e^{0x}((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x)$ pomocí jiném si programem

$y_P' = \cos x(A + Cx + D) + \sin x(C - Ax - B)$

$y_P'' = \cos x(-Ax - B + 2C) + \sin x(-Cx - 2A - D)$

$y_P''' = \cos x(-Cx - 3A - D) + \sin x(Ax + B - 3C)$

$y_P^{iv} = \cos x(Ax + B - 4C) + \sin x(Cx + 4A + D)$

dosazení:

$\cos x[Ax + B - 4C] + \sin x[Cx + 4A + D] - 2\cos x[-Cx - 3A - D] - 2\sin x \cdot [Ax + B - 3C] + \cos x[-Ax - B + 2C] + \sin x[-Cx - 2A - D] = \sin x + x\cos x$

$x\cos x[\cancel{A} + 2C - \cancel{A}] + x\sin x[\cancel{C} - 2A - \cancel{C}]$
$+ \cos x[\cancel{B} - 4C + 6A + 2D - \cancel{B} + 2C] + \sin x[4A + \cancel{D} - 2B + 6C - 2A - \cancel{D}]$
$= 1x\cos x + 0x\sin x + 0\cos x + 1\sin x$

(5e)

$2C = 1$ $\qquad -2C + 6A + 2D = 0$

$-2A = 0$ $\qquad 2A - 2B + 6C = 1$

$C = \frac{1}{2} \quad A = 0 \quad \rightarrow \quad -1 + 2D = 0 \quad \rightarrow \quad D = \frac{1}{2}$

$-2B + 3 = 1 \qquad B = 1$

$y_p = \cos x + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\sin x$

$y = y_h + y_p$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

$c_{1-4} \in \mathbb{R}$

$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x \underline{+ c_4 x e^x + \cos x} + \frac{1}{2}\sin x\,(x+1)$

Def: Počáteční podmínka

Otázka

Najděte řešení ODR

1. $y'' = -y,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$
2. $y'' = -y,\ y(0) = 2, y'(0) = -3$
3. $y'' = -y,\ y(0) = 0, y'(\pi) = 0$
4. $y'' = -y,\ y(0) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\sin x$; $-3\sin x + 2\cos x$; 0; $c \sin x$; $c, x \in \mathbb{R}$

Definice

ODR s *počátečními podmínkami* rozumíme

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$$

kde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Řešením pak rozumíme dvojici (y, I), kde I je otevřený interval a y je funkce definovaná alespoň na I, $y \in C^2(I)$, $x_0 \in I$, splňující

$$\begin{aligned} y''(x) &= f(x, y(x), y'(x)), \qquad \forall x \in I, \\ y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1. \end{aligned}$$

(6)

9. Diferenciální rovnice $t^2x'' + 3tx' + 2x = 0$ má řešení tvaru $x(t) = t^n$, kde n je konstanta. Najděte její fundamentální systém řešení.

Řešení:

Daná rovnice je homogenní lineární diferenciální druhého řádu. Fundamentální systém řešení se tedy skládá ze dvou nezávislých řešení. Protože je to rovnice Eulerova typu, předpokládáme řešení ve tvaru $x(t) = t^n$. Po dosazení předpokládaného řešení do diferenciální rovnice, dostaneme pro n charakteristickou rovnici

$$n(n-1) + 3n + 2 = n^2 + 2n + 2 = 0 \Longrightarrow n_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}\,.$$

Pro $t > 0$ má tedy rovnice komplexní fundamentální systém řešení

$$x_1(t) = t^{-1+\mathrm{i}} = t^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln t} = \frac{\cos(\ln t) + \mathrm{i}\sin(\ln t)}{t}$$
$$x_2(t) = t^{-1-\mathrm{i}} = t^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ln t} = \frac{\cos(\ln t) - \mathrm{i}\sin(\ln t)}{t}\,.$$

Je zvykem volit reálný fundamentální systém řešení

$$x_1(t) = \frac{\cos(\ln t)}{t} \quad \text{a} \quad x_2(t) = \frac{\sin(\ln t)}{t}\,,$$

který je lineární kombinace komplexního fundamentálního systému řešení.

(8)

10. V závislosti na konstantách $p, q > 0$ a q najděte fundamentální systém řešení diferenciální rovnice $x'' + 2px' + q^2x = 0$ (*volné tlumené kmity*).

Řešení:

Daná rovnice je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Její charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2p\lambda + q^2 = 0$ má řešení

$$\lambda_{\pm} = -p \pm \sqrt{p^2 - q^2}\,. \tag{1}$$

Fundamentální systém řešení závisí na hodnotě diskriminantu $p^2 - q^2$ rovnici (1).

1) Je-li diskriminant $p^2 - q^2 = r^2 > 0$ je fundamentální systém řešení $x_1(t) = \mathrm{e}^{-(p-r)t}$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{-(p+r)t}$. Obecné řešení

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-(p-r)t} + C_2\mathrm{e}^{-(p+r)t}$$

je klesající (protože $p > r$) a jeho limita pro $t \to +\infty$ je rovna nule.

Řešení, které splňuje počáteční podmínky $x(0) = x_0$ a $x'(0) = v_0$ je

$$x(t) = \mathrm{e}^{-pt}\left(x_0 \cosh rt + \frac{v_0 + px_0}{r}\sinh rt\right).$$

Toto řešení, pokud není nulové, má tu vlastnost, že může pouze jednou procházet bodem $x = 0$. To nastane v čase $t > 0$, pro který platí rovnost

$$x_0 \cosh rt + \frac{v_0 + (p-r)x_0}{r}\sinh rt = 0 \Longrightarrow t = \frac{1}{2r}\ln\frac{v_0 + (p-r)x_0}{v_0 + (p+r)x_0}$$

Takový pohyb se nazývá *aperiodický*.

(8) 2) Je-li diskriminant $p^2 - q^2 = 0$ je fundamentální systém řešení $x_1(t) = \mathrm{e}^{-pt}$ a $x_2(t) = t\mathrm{e}^{-pt}$. Obecné řešení

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-pt} + C_2 t\mathrm{e}^{-pt}$$

má v podstatě stejné vlastnosti jako v případě 1). Řešení s danými počátečními podmínkami je

$$x(t) = \mathrm{e}^{-pt}\big(x_0 + (v_0 + px_0)t\big)\,,$$

které může opět procházet pouze jednou bodem $x = 0$. Takový pohyb se nazývá také aperiodický (ale nejsem si příliš jist, zda nemá nějaký přívlastek).

3) Je-li diskriminant $p^2 - q^2 = -\omega^2 < 0$, $\omega > 0$, je fundamentální systém řešení $x_1(t) = \mathrm{e}^{-pt}\cos\omega t$ a $x_2(t) = \mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t$. Obecné řešení

$$x(t) = \mathrm{e}^{-pt}\big(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t\big)$$

prochází bodem $x = 0$ pro $t > 0$ nekonečněkrát. Řešení, které splňuje počáteční podmínky je

$$x(t) = \mathrm{e}^{-pt}\left(x_0\cos\omega t + \frac{v_0 + px_0}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Tento pohyb můžeme považovat za vlnění s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{q^2 - p^2} = q\sqrt{1 - \frac{p^2}{q^2}}\,,$$

jehož amplituda A je klesající funkcí času, $A(t) = A_0\mathrm{e}^{-pt}$. V případě, že je *konstanta tlumení* p malá vzhledem k úhlové frekvenci volných netlumených kmitů q, se během jednoho kmitu, tj. za půlperiodu $\dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi}{\sqrt{q^2 - p^2}}$ amplituda změní $\mathrm{e}^{-\frac{p\pi}{\sqrt{q^2-p^2}}}$-krát. Logaritmus tohoto výrazu s opačným znaménkem, tj. $\dfrac{p\pi}{\sqrt{q^2 - p^2}}$ se nazývá *logaritmický dekrement* kmitavého pohybu.

---

(7) **11.** V závislosti na parametru $r \in \mathbb{R}$ najděte všechna řešení diferenciální rovnice $x'' + rx = 0$, které splňují podmínky: a) $x(0) = 0$, $x'(1) = 1$; b) $x(0) = 0$, $x'(1) = 0$.

Řešení: Tato úloha se liší od všech předešlých úloh tím, že jsou podmínky na řešení dány ve dvou různých bodech. Takové podmínky se nazývají *okrajové podmínky* a úloha najít řešení diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami *okrajová úloha* pro diferenciální rovnici. Řešit okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici je zcela jiný, a zpravidla složitější, problém než najít řešení diferenciální rovnice s počátečními podmínkami.

1) Pro $r < 0$ je obecné řešení diferenciální rovnice

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{\sqrt{r}t} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{r}t}\,.$$

Z okrajových podmínek dostaneme pro konstanty C_1 a C_2 soustavu rovnic

$$C_1 + C_2 = 0\,,\quad \sqrt{r}\big(C_1\mathrm{e}^{\sqrt{r}} - C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{r}}\big) = \epsilon\,,$$

kde $\epsilon = 1$ v případě a), resp. $\epsilon = 0$ v případě b). Tedy v případě a) je $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{r}\cosh\sqrt{r}}$ a řešení rovnice je

$$x(t) = \frac{\sinh\sqrt{r}t}{\sqrt{r}\cosh\sqrt{r}}\,.$$

V případě b) je $C_1 = C_2 = 0$ a daná rovnice má pouze nulové řešení.

(7)

2) Pro $r = 0$ je obecné řešení rovno $x(t) = C_1 + C_2 t$. Z okrajových podmínek pak plyne, že v případě a) je řešení $x(t) = t$ a v případě b) dostáváme opět nulové řešení $x(t) = 0$.

3) Pro $r > 0$ je obecné řešení rovno

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{r}t + C_2 \sin \sqrt{r}t\,.$$

Z okrajových podmínek dostaneme pro konstanty C_1 a C_2 soustavu rovnic

$$C_1 = 0\,, \quad \sqrt{r}C_2 \cos \sqrt{r} = \epsilon\,.$$

Tedy je-li $r \neq \left(\dfrac{2k+1}{2}\pi\right)^2$, má rovnice v případě a) řešení $x(t) = \dfrac{\sin \sqrt{r}t}{\sqrt{r}\cos \sqrt{r}}$ a v případě b) pouze nulové řešení $x(t) = 0$.

Ale je-li $r = \left(\dfrac{2k+1}{2}\pi\right)^2$, nemá rovnice v případě a) žádné řešení, ale v případě b) dostáváme množinu řešení $x(t) = C \sin \sqrt{r}t$, kde C je libovolná konstanta.

Poznámka. Hlavní rozdíl mezi oběma případy spočívá v tom, že úloha v případě a) nemá tu vlastnost, že lineární kombinace řešení je opět řešení, což mají homogenní lineární rovnice, kdežto úloha v případě b) tuto vlastnost má. Tedy z tohoto hlediska není úloha v tomto případě homogenní. Pokud bychom zavedli v případě a) novou proměnnou $y(t) = x(t) - t$ získali bychom nehomogenní rovnici $y'' + ry = rt$, jejíž řešení by vyhovovalo okrajovým podmínkám $y(0) = y'(0) = 0$. Je to vlastně nehomogenní úloha pro případ b), který lze považovat za příslušnou homogenní úlohu. Podrobnější analýzou tohoto příkladu bychom mohli ukázat, že "homogenní" rovnice (případ b) má pouze nulové řešení právě tehdy, když existuje právě jedno řešení "nehomogenní" rovnice (případ a) pro každou pravou stranu, tj. hodnotu $x'(1)$ (*Fredholmova alternativa*).
Tuto větu byste měli znát s teorie soustav lineárních algebraických rovnic a platí i v mnohem obecnějších případech.

---

12. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$x''' = \sqrt{1 + (x'')^2}\,. \tag{1}$$

Řešení: Protože diferenciální rovnice (1) neobsahuje proměnné x a x', zavedeme novou proměnnou $y(t) = x''(t)$. Z rovnice (1) dostaneme pro tu funkci diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' = \sqrt{1 + y^2}\,,$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Standardním postupem získáme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} = \int \mathrm{d}t \Longrightarrow \operatorname{argsinh} y = t + C_1 \Longrightarrow y(t) = \sinh(t + C_1)\,.$$

Protože $y = x''$, dostaneme dvojnásobnou integrací obecné řešení diferenciální rovnice (1) ve tvaru

$$x(t) = \sinh\bigl(t + C_1\bigr) + C_2 t + C_3\,,$$

kde C_1, C_2 a C_3 jsou libovolné konstanty.

---

13. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$x\bigl(1 - \ln x\bigr)x'' + \bigl(1 + \ln x\bigr) \cdot \bigl(x'\bigr)^2 = 0\,. \tag{1}$$

Řešení: Protože diferenciální rovnice (1) neobsahuje explicitně nezávisle proměnnou t, zavedeme novou proměnnou $p(x)$ rovnicí $p(x) = x'$. Protože pak platí $x'' = pp'$, získáme z rovnice (1) vztah

$$p\Bigl(x\bigl(1 - \ln x\bigr)p' + \bigl(1 + \ln x\bigr)p\Bigr) = 0\,. \tag{2}$$

(9)

1. ZÁHADA PRUŽINOVÉHO HOUPADLA

Proč se malé dítě houpe na pružinovém houpadle rychleji než dospělý člověk?

Pohyb je popsán rovnicí $\boxed{my'' + ky = 0}$, kde m je hmotnost člověka a k charakteristika pružiny.

- Jedná se o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice $mz^2 + k = 0$ má kořeny $z_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$.
- Řešením je funkce $y = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$.
- Pokud roste m, frekvence kmitů $\sqrt{\frac{k}{m}}$ klesá.