26. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Definice 1. *Lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu s konstantními koeficenty* rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \tag{1}$$

kde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b).

Homogenní rovnicí příslušnou k rovnici (1) rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0. \tag{2}$$

Poznámka 2. Maximální řešení rovnice (2) jsou definována na celém $\mathbb{R}$.

Definice 3. *Charakteristickým polynomem* rovnice (2) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 4 (tvar fundamentálního systému)**.** Nechť χ je charakteristický polynom rovnice (2). Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu χ s násobnostmi $r_1, \dots, r_s$. Nechť $\alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_l + \beta_l i$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu χ s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1, \dots, q_l$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, $\beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$. Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (2):

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \dots & x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_s x}, & xe^{\lambda_s x}, & \dots & x^{r_s-1}e^{\lambda_s x}, \\
e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \\
e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, & xe^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, & \dots & x^{q_l-1}e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, \\
e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x, & xe^{\alpha_l x}\sin\beta_l x, & \dots & x^{q_l-1}e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x
\end{array}$$

Věta 5 (speciální pravá strana)**.** Nechť

$$f(x) = e^{\mu x} \cdot (P(x)\cos\nu x + Q(x)\sin\nu x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (1) ve tvaru

$$y_p(x) = x^m e^{\mu x} \cdot (R(x)\cos\nu x + S(x)\sin\nu x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde R, S jsou polynomy stupně ne většího než $\max\{\mathrm{st}\, P, \mathrm{st}\, Q\}$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\mu + i\nu$ jakožto kořen charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice.

Algoritmus

1. Vyřešíme homogenní rovnici:
   (a) Napíšeme charakteristický polynom a najdeme kořeny.
   (b) Sestavíme řešení.
2. Zkontrolujeme, že pravá strana je ve vhodném tvaru, případně jestli není třeba součtem vhodných tvarů.
3. Použijeme Větu o Speciální pravé straně a odhadneme tvar řešení (s několika neznámými koeficienty).
4. Dosadíme do nehomogenní rovnice a dopočteme koeficienty.
5. Řešením je homogenní + dopočtené řešení.

Příklady

1. Přiřaďte funkce ke tvaru $e^{ax}(P(x)\cos(bx) + Q(x)\sin(bx))$:

   (1) $12x^2 + 2x + 1$
   (2) $3x - 1$
   (3) $8xe^x$
   (4) $-2e^{2x}\cos x$

   (A) $e^{0x}((3x-1)\cos 0x + 0\sin 0x)$
   (B) $e^{0x}((12x^2+2x+1)\cos 0x + 0\sin 0x)$
   (C) $e^{2x}((-2)\cos 1x + 0\sin 1x)$
   (D) $e^{1x}((8x)\cos 0x + 0\sin 0x)$

2. Najděte řešení diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou
   (a) $y'' + y' - 6y = 12x^2 + 2x + 1$
   (b) $y'' - 3y' = 3x - 1$
   (c) $y'' + 2y' + 5y = 8xe^x$
   (d) $y'' + y = x + \sin x$
   (e) $y'' - 4y' + 5y = -2e^{2x}\cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
3. Najděte řešení diferenciálních rovnic
   (a) $y''' + y'' + y' + y = 8xe^x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$
   (b) $y^{iv} + 8y'' + 16y = 64x\sin 2x$
   (c) $y''' - y' + 4y = xe^{-2x}$
   (d) $y''' - 4y'' + 4y' = 2x + e^{2x} - \cos 2x$
   (e) $y''' + y'' - y' - y = 4\cos x$
   (f) $y''' + 4y'' - 7y' - 10y = 100x^2 - 64e^{3x}$

4. V jakém tvaru budete hledat řešení?

(1) $y''' + y'' + y = e^x$
(2) $y''' + y'' - 2y = (x+1)e^x$
(3) $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$
(4) $y''' + y'' = x^3 + x^2$
(5) $y'' + y' + y = e^x \cos x$
(6) $y'' - y' + y = \cos x - \sin x$
(7) $y''' - 2y'' + 5y' = 2e^x \sin 2x$

(A) e^x
(B) Ae^x
(C) $(Ax+B)e^x$
(D) $x(Ax+B)e^x$
(E) $x^2(Ax+B)e^x$
(F) Ae^{-x}
(G) Ax^3e^{-x}
(H) $(Ax^3+Bx^2+Cx+D)e^{-x}$
(I) Ax^3+Bx^2
(J) Ax^3+Bx^2+Cx+D
(K) $x^2(Ax^3+Bx^2+Cx+D)$
(L) $(x^2+x)(Ax^3+Bx^2+Cx+D)$
(M) $e^x(A\cos x)$
(N) $e^x(A\cos x + B\sin x)$
(O) $x(A\cos x + B\sin x)$
(P) $A\cos x + B\sin x$
(Q) $xe^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$
(R) $e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$

Zkouškové příklady

5. Najděte řešení diferenciálních rovnic

(a) $y^{(4)} - y = x^2$
(b) $y^{(4)} - 10y'' + 25y = 1 + \sin x$
(c) $y''' + 2y'' + y' + 2y = xe^x$
(d) $y''' + 4y'' + y' - 6y = 10x\sin x$
(e) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = \sin x + x\cos x$

Bonus

6. Najděte řešení ODR

(a) $y'' = -y,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$
(b) $y'' = -y,\ y(0) = 2, y'(0) = -3$
(c) $y'' = -y,\ y(0) = 0, y'(\pi) = 0$
(d) $y'' = -y,\ y(0) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

7. V závislosti na parametru $r \in \mathbb{R}$ najděte FSŘ diferenciální rovnice

$$y'' + ry = 0.$$

8. V závislosti na konstantách $p, q > 0$ najděte FSŘ diferenciální rovnice

$$y'' + 2py' + q^2 y = 0.$$

9. Proč se malé dítě na pružinové houpačce (zvířátko na pružině) houpe rychleji než dospělý? Pohyb je popsán rovnicí $my'' + ky = 0$, kde m je hmotnost houpajícího se člověka a k charakterizuje pružinu.