od ideálního stavu, který žádá nalézt *všechna* maximální řešení rovnice, neboť o tom, zda jsme opravdu získali všechna maximální řešení, nic nevíme. Nebezpečí formálního postupu ukazuje následující příklad:

(1a) **Příklad 2.4.1.** Řešte rovnici

$$y' = 2\sqrt{y} \tag{2.19}$$

a nalezněte všechna (maximální) řešení, která splňují podmínku

$$\text{(a) } y(0) = -1; \qquad \text{(b) } y(1) = 0; \qquad \text{(c) } y(4) = 1.$$

Jde tedy o tři Cauchyho úlohy, lišící se počáteční podmínkou.

Řešení, které by vyhovovalo podmínce (a), neexistuje. Obecněji, žádným bodem poloroviny $\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 ;\ y < 0 \}$ neprochází řešení rovnice (2.19). Všimněte si, že formálně získaná řešení

$$y(x) = (x - C)^2 , \quad C \in \mathbb{R} ,$$

nejsou řešeními na rovnice (2.19) na $\mathbb{R}$, protože řešením musí být vždy *neklesající funkce*. Také zřejmé identicky nulové řešení bychom pro žádné $C \in \mathbb{R}$ odtud nezískali.

Při zvoleném $C \in \mathbb{R}$ je (maximálním) řešením funkce

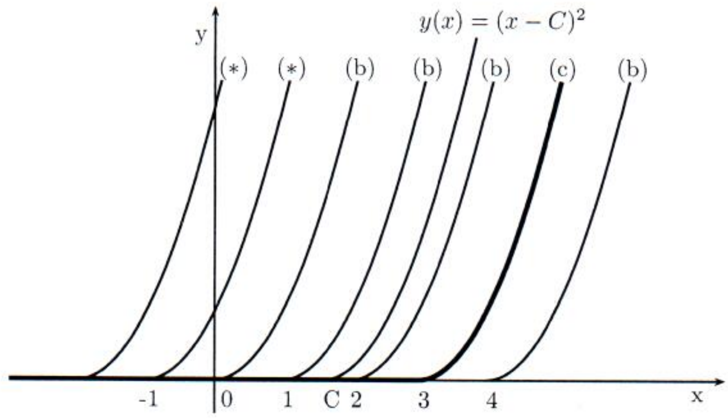
$$y_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, C) , \\ (x - C)^2 & \text{pro} \quad x \in [C, +\infty) ; \end{cases}$$

viz Obr. 2.2. Dalším maximálním řešením je funkce $y \equiv 0$. Protože je $y'(C) = 0 = 2\sqrt{y(C)}$, musíme dokázat, že pro popsaná řešení skutečně $y'(C) = 0$. Snadno však nahlédneme, že y je spojitá funkce v bodě C a že $y'_-(C) = 0$. Je zřejmě

$$\lim_{x \to C+} y'(x) = \lim_{x \to C+} 2(x - C) = 0 = y'_+(C) ,$$

takže $y'_-(C) = y'_+(C) = 0$, což jsme potřebovali dokázat. Kromě těchto již nalezených (maximálních) řešení žádná další maximální řešení neexistují.

Pro $C = 3$ dostaneme požadované maximální řešení pro které je $y(4) = 1$. Na Obr. 2.2 jsou schematicky znázorněna některá řešení.



Obr. 2.2

Symbolem $(*)$ jsou označena ta řešení rovnice, která *nevyhovují* podmínce (b), všechna ostatní řešení načrtnutá v Obr. 2.2 podmínce (b) vyhovují, ale pouze jediné z nich vyhovuje podmínce (c). To je označeno (c) a jeho graf je zvýrazněn.

KUCHAŘKA NA ŘEŠENÍ ODR

Na základě poznámek ze cvičení zpracoval
Vojtěch Krejčiřík
korektury Petra Suková

Na začátek několik věcí, na které v žádném případě nezapomenout. Řešením ODR je funkce ji splňující a interval, na kterém platí, proto vždy uvést INTERVAL, a to maximimální možný. Pokud je zadána počáteční podmínka, musí ležet v intervalu. Při integrování také nezapomínejte na integrační KONSTANTU!
Formální zápis derivace: $y' = \frac{dy}{dx}$.

I. Separace proměnných

Předpis

$$y' = g(y)\, h(x).$$

Pokud $g(C_0) = 0$ kde $h(x)$ má smysl, existuje řešení

$$y = C_0.$$

Mám ošetřeno a můžu dělit

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)\, dx,$$

Přímou integrací dostanu řešení. Pozor na možné napojení na konstantní řešení. Aby bylo možné, je třeba aby v bodě x_0, kde k napojení dojde, platilo:

$$f(x_0) = C_0\,,\ f'(x_0) = 0.$$

(1b) *Příklad*:

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}.$$

Zřejmě $D(f) = (0, \infty)$. Funkce $y = 0$ je řešením rovnice.
Separuji proměnné a zintegruji

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{x} + C.$$

Vyjádřím y, pozor, umocněním přidám jedno řešení.

$$y = (\sqrt{x} + C)^2.$$

Následuje diskuze vzhledem ke konstantě C.

1. $C > 0$: Nelze napojit, funkce má na tvar

$$y = (\sqrt{x} + C)^2 \quad , \quad D(f) = (0, \infty).$$

2. $C < 0$: Lze napojit na konstantní řešení. Ovšem nelze použít $y = (\sqrt{x} + C_1)^2$ na $(0, C_1^2)$, protože $y' < 0$, nesouhlasí se zadáním, je to řešení přidané umocněním.

Řešení tedy zapíšeme takto :
a) $y = 0$ na $D(f)$.
b) $y = (\sqrt{x} + C_1)^2$ na $D(f)$, kde $C_1 \in \Re$.
c) $y = 0$ na $(0, C_2^2)$, $y = (\sqrt{x} + C_2)^2$ na (C_2^2, ∞), kde $C_2 < 0$.

II. Rovnice homogenní a ty, které na ně lze převést

Předpis

$$y' = f(y, x).$$

a) Pokud pro funkci $f(y, x)$ platí : $f(ty, tx) = f(y, x)$, to znamená, že y a x vystupují přímo v podílu, lze zavést substituci

$$y = z(x)\, x,$$

$$y' = z'(x)\, x + z(x),$$

kterou rovnici převedu do tvaru separovaných proměnných.

Příklad:

$$y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}.$$

$D(f) = \Re \setminus \{0\}$, nulové řešení neexistuje, zavedu výše uvedenou substituci

$$z'\, x + z = z - e^z,$$

z se odečtou a zůstane rovnice ve tvaru separovaných proměnných, kterou už umím řešit.

$$\int \frac{dz}{e^z} = - \int \frac{dx}{x}.$$

$$-e^{-z} = -\ln|x| + C.$$

$$e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + C.$$

$$y = -x\, \ln(C + \ln|x|).$$

b) Funkce na pravé straně je ve tvaru

$$f(y, x) = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}.$$

(1c) 1) 3. $y' = \sqrt[3]{y}$. Opět viz Poznámku 3, $g(y) = \sqrt[3]{y}$ a $h(x) = 1$.

1. krok
Zřejmě $I = \mathbb{R}$.

2. krok
g je definována všude (tj. na $\mathbb{R}$), nulová je pouze v 0 (tedy máme řešení $y \equiv 0$) a tedy máme intervaly $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, \infty)$.

3. krok
Integrujme:

$$\frac{y'(x)}{\sqrt[3]{y(x)}} = 1,$$

tedy

$$\frac{3}{2} y(x)^{\frac{2}{3}} = x + c.$$

4. krok
Vidíme, že bez ohledu na znaménko y musí být $x + c > 0$, tedy $x \in (-c, \infty)$. Je-li $y < 0$ (tj. uvažujeme J_1), pak $y = -\left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}}$. Jeli $y > 0$, pak $y = \left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}}$.

5. krok
Vidíme, že v obou případech je $\lim_{x \to (-c)^+} \pm \left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}} = 0$, tedy zde můžeme přilepit nulové řešení. Celkem dostaneme řešení

$$y_{1,2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c \\ \pm \left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^{\frac{3}{2}}, & x > c. \end{cases}.$$

A nesmíme zapomenout, že navíc ještě máme singulární řešení $y_3(x) = 0$.

4. $xy' - y\left(1 + \log \frac{y}{x}\right) = 0$. Vidíme, že pro $x = 0$ to nedává smysl, a tedy ani žádné řešení nemůže nulou procházet. Tedy zadanou rovnici můžeme podělit x. Dostaneme

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \log \frac{y}{x}\right). \tag{3}$$

Jedná se tedy o homogenní rovnici, a tedy použijeme substituci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Pak $y(x) = xz(x)$, a tedy $y'(x) = z(x) + xz'(x)$. Dosadíme do (3):

$$z + xz' = z(1 + \log z)$$

Tedy po úpravě (již víme, že x můžeme podělit):

$$z' = \frac{1}{x} z \log z$$

To už je rovnice se separovanými proměnnými, a tedy můžeme postupovat podle Poznámky 3.

1. krok
Vidíme, že pro $x = 0$ to není definované, a tedy máme dva intervaly $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, \infty)$.

Řešení:

1. $y' = |x|$. Zde jde o prosté nalezení primitivní funkce. Na intervalu $(0, \infty)$ máme primitivní funkce $\frac{x^2}{2} + c$, a na $(-\infty, 0)$ funkce $-\frac{x^2}{2} + d$. Je vidět, že abychom tato řešení mohli v nule slepit pomocí Věty 1 je třeba, aby $c = d$. Tedy dostáváme řešení

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + c, & x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x^2}{2} + c, & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

pro libovolné $c \in \mathbb{R}$. Můžeme to zapsat také jako $y(x) = \frac{1}{2}x|x| + c$.

(1d) 2. $y' = yx$. Postupujeme podle Poznámky 3. Označme $g(y) := y$ a $h(x) := x$.

1. krok

Zjevně je funkce x definovaná na $\mathbb{R}$, tedy $I := \mathbb{R}$.

2. krok

Funkce g je nulová pouze pro $y = 0$, tedy máme jedno stacionární řešení $y(x) = 0$.

Funkce g je definovaná všude, a nenulová je pro intervaly $J_1 := (-\infty, 0)$ a $J_2 := (0, \infty)$.

3. krok

Integrujme!

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x,$$

tedy díky větě o substituci

$$\log |y(x)| = \frac{x^2}{2} + c.$$

4. krok

Nejprve se zbavíme logaritmu.

$$|y(x)| = e^{\frac{x^2}{2}+c} = e^c e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Abychom si zjednodušili zápis, označme $d := e^c$. Konstanta $c \in \mathbb{R}$ byla libovolná, tedy $d > 0$ bude libovolné.

Nyní se chceme zbavit absolutní hodnoty, a pro to už musíme rozlišit, jestli řešíme případ kdy $y(x) \in J_1 = (-\infty, 0)$ nebo $y(x) \in J_2 = (0, \infty)$.

Tedy, na $(0, \infty)$ máme $y = de^{\frac{x^2}{2}}$. A vidíme, že pro každé c je $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}+c} > 0$.

Obdobně na J_2 dostáváme pro každé $c \in \mathbb{R}$ řešení $y(x) = -de^{\frac{x^2}{2}}$.

5. krok

Jelikož řešení $\pm e^{\frac{x^2}{2}+c}$ jsou nenulová, není možné navázat na singulární řešení, a tedy se lepit nebude a všechna řešení dostaneme jako

$$y(x) = de^{\frac{x^2}{2}},$$

kde d je libovolné reálné číslo. (Tím, že d volíme libovolné reálné pokryjeme všechny možnosti. Singulární řešení dostaneme pro volbu $d = 0$.)

13.1.4 (Postup při řešení (13.2)). Nechť f, h jsou spojité funkce reálné proměnné. Při hledání maximálních řešení rovnice (13.2) postupujeme následujícím způsobem.

(1) Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v $\mathcal{D}(h)$.
(2) Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (13.2). Těmto řešením se říká **singulární** nebo také **stacionární**.
(3) Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je g nenulová.
(4) Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je spojitá na I a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na I a G je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g}$ na J. Existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že platí $G(y(x)) = H(x) + c$ na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

(5) Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c).$$

(Zde G^{-1} je inverzní funkce ke G. Existuje, protože G je intervalu J buď rostoucí nebo klesající.)

(6) Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení pomocí Věty 13.1.2.

(1e) || **13.1.5. Příklad.** Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

Řešení. V tomto případě máme v rovnici (13.2) $h(x) = 1$ a $g(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

(1) Protože $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$, budeme řešení hledat na $\mathbb{R}$.
(2) Nulové body funkce g jsou 1 a -1. Tedy $y = 1$ a $y = -1$ jsou stacionárními řešeními naší rovnice.
(3) Maximální otevřený interval, kde je g nenulová, je $(-1, 1)$. Budeme tedy hledat řešení s hodnotami v tomto intervalu.

(4) Je-li y řešení s hodnotami v $(-1, 1)$, platí

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1-y^2(x)}} = 1.$$

Primitivní funkce k levé straně je $\arcsin y(x)$ a primitivní funkce k pravé straně je x. Existuje tedy konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\arcsin y(x) = x + c.$$

(5) Protože hledáme řešení s hodnotami v $(-1, 1)$, pro pevné $c \in \mathbb{R}$ máme

$$y_c(x) = \sin(x+c), \quad x \in (-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c).$$

(6) Lepením singulárních řešení s řešeními z bodu 5 dostaneme pro pevné $c \in \mathbb{R}$ maximální řešení

$$y_c(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2} - c], \\ \sin(x+c), & x \in (-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c), \\ 1, & x \in [\frac{\pi}{2} - c, \infty) \end{cases}$$

♣

(1g) ||

13.1.6. Příklad. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = x\sqrt[3]{y^2}$.

Řešení. Zadaná rovnice je tvaru (13.2), kde $h(x) = x$ a $g(y) = \sqrt[3]{y^2}$.

(1) Protože $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$, budeme hledat řešení na $\mathbb{R}$.
(2) Nulový bod funkce g je 0, tedy $y = 0$ je stacionární řešení.
(3) Maximální otevřené intervaly, kde je g nenulová, jsou $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.
(4) Je-li y řešení s hodnotami v intervalu $(-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$, platí pro něj rovnost

$$\frac{y'(x)}{\sqrt[3]{y^2}} = x.$$

Primitivní funkce k levé straně je $G(y) = 3y^{\frac{1}{3}}(x)$, primitivní funkce k pravé straně je $H(x) = \frac{x^2}{2}$. Existuje tedy konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$3y^{\frac{1}{3}}(x) = \frac{x^2}{2} + c.$$

(5) Vezměme nyní $c \in \mathbb{R}$ pevné. Pro intervaly $J = (0, \infty)$ a $J = (-\infty, 0)$ hledáme otevřený interval I_c takový, že $\frac{x^2}{2} + c \in J$ pro $x \in I_c$.
- Nechť $J = (0, \infty)$. Pak výše uvedený požadavek dává tři možnosti:

(1g)

- $c > 0$, $I_c = \mathbb{R}$ a $y_c(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3$,
- $c \leq 0$, $I_c = (-\infty, -\sqrt{-2c})$ a $y_c(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3$,
- $c \leq 0$, $I_c = (\sqrt{-2c}, \infty)$ a $y_c(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3$.

• Nechť $J = (-\infty, 0)$. Hledáme otevřený interval I_c takový, že $\frac{x^2}{2} + c \subset (-\infty, 0)$ pro $x \in I_c$. Toto je možné pouze pro $c < 0$. Pak $I_c = (-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c})$ a $y_c(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3$.

(6) Nalezená řešení z bodu (5) a (2) nyní lze lepit dohromady v bodech osy x, protože

$$\lim_{x \to \pm\sqrt{-2c}} \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3 = 0.$$

To nám dává následujících devět různých typů maximálních řešení:

• $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$,

• $y(x) = \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c > 0$.

• pro $c \leq 0$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2c}, \infty), \end{cases}$$

• pro $c \leq 0$,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}], \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c}, \infty), \end{cases}$$

• pro $c \leq 0$,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}], \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c}, \infty). \end{cases}$$

(1g)

- pro $c_1, c_2, c_2 \leq 0$, $c_1 \geq c_2 \geq c_3$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_1}, -\sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_2}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_3}], \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (\sqrt{-2c_3}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c_1, c_2 \leq 0$, $c_1 \geq c_2$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [-\sqrt{-2c_1}, -\sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c_2}, \sqrt{-2c_2}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_2}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 \geq c_2$,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (\sqrt{-2c_2}, \infty), \end{cases}$$

- pro $c_1, c_2 \geq 0$,

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in [\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}], \\ \left(\frac{\frac{x^2}{2}+c}{3}\right)^3, & x \in (\sqrt{-2c_2}, \infty). \end{cases}$$

♣

13.1.7. Příklad. Nechť $p : (a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' + p(x)y = 0$.

Požadujeme-li, aby řešení splňovalo rovnost $y(x_0) = y_0$ pro nějakou dvojici $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, mluvíme o *počáteční podmínce*.

Začněme s typem rovnic, k jejichž řešení nepotřebujeme o mnoho více než ovládat některé metody hledání primitivních funkcí.

§29. Rovnice se separovanými proměnnými. K základním dovednostem patří řešení diferenciálních rovnic tvaru

$$\text{(SP)} \qquad y'h(y) = g(x),$$

kterým se říká „rovnice se separovanými proměnnými". Předpokládejme, že funkce $h\colon J \to \mathbb{R}$ a $g\colon I \to \mathbb{R}$ jsou spojité na otevřených intervalech J a I. Metoda řešení rovnice (SP) je založena na pozorování, že každé řešení $y = y(x)$ definované na otevřeném intervalu $I_0 \subset I$ s hodnotami v J musí pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ splňovat na intervalu I_0 rovnici

$$H(y(x)) = G(x) + c,$$

kde $H'(y) = h(y)$ pro $y \in J$, $G'(x) = g(x)$ pro $x \in I$. Naopak, má-li nějaká funkce y vlastní derivaci na I a splňuje-li uvedenou rovnici, pak je řešením. Je-li H prostá na otevřeném intervalu $J_0 \subset J$ (například pokud funkce h nenabývá na J_0 hodnoty 0), pak všechna maximální řešení (SP) s hodnotami v J_0 jsou tvaru $y_c(x) = H_0^{-1}(G(x) + c)$ na maximálních otevřených intervalech obsažených v $U_c = (G + c)^{-1}(H_0(J_0))$, kde H_0 je restrikce H na J_0.

Jak použít toto tvrzení (či pozorování) si ukážeme na řešení konkrétních příkladů. Také ukážeme, jak lze některé úlohy, které nejsou tvaru (SP) řešit pomocí úloh, které tvar (SP) mají.

Poznámky.

1. Výše naznačený postup řešení ukazuje, že k řešení („integrování") rovnice ve tvaru (SP) je potřeba především najít primitivní funkce k funkcím g a h.

2. Jak uvidíme v §31, rovnice se separovanými proměnnými ve tvaru (SP) jsou speciálním případem rovnic v exaktním tvaru.

(1F) Příklad Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y'y = x^3.$$

Řešení. Funkce $g(x) = x^3$ a $h(y) = y$ jsou spojité na $\mathbb{R}$. Najděme nějaké primitivní funkce k funkcím g a h na $\mathbb{R}$. Jsou to například funkce $G(x) = \frac{1}{4}x^4$ a $H(y) = \frac{1}{2}y^2$. Funkce y definovaná na otevřeném intervalu I je tudíž řešením naší rovnice, právě když má všude v I vlastní derivaci a existuje takové $c \in \mathbb{R}$, že

$$(*) \qquad \frac{1}{2}(y(x))^2 = \frac{1}{4}x^4 + c, \qquad x \in I.$$

Funkce H ovšem není prostá na $\mathbb{R}$, maximální otevřené intervaly, na nichž je prostá, jsou $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, +\infty)$. Hledejme nejprve řešení s hodnotami v J_1 nebo

(11) v J_2. Protože obrazem každého z intervalů J_1 a J_2 při funkci H je interval $(0, +\infty)$, plyne z (*), že řešení s hodnotami v J_1 nebo J_2 jsou definována na intervalech obsažených v množině $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{4}x^4 + c > 0\}$. To jsou intervaly:

$$\begin{gathered} \mathbb{R} \qquad \text{pro } c > 0, \\ (-\infty, 0) \text{ a } (0, +\infty) \qquad \text{pro } c = 0, \\ (-\infty, -\sqrt[4]{-4c}) \text{ a } (\sqrt[4]{-4c}, +\infty) \qquad \text{pro } c < 0. \end{gathered}$$

Na těchto intervalech mají tedy řešení tvar

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2c} \qquad \text{nebo} \qquad y(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2c}.$$

Zbývá zjistit, zda tato řešení jsou maximální, a případně z nich maximální řešení poslepovat.

Řešení příslušná $c > 0$ jsou maximální, protože jsou definována na celém $\mathbb{R}$, a není je proto možné již prodloužit. Uvažme dále řešení příslušná $c < 0$. Ta jsou definována na intervalech $(-\infty, -\sqrt[4]{-c})$ a $(\sqrt[4]{-c}, +\infty)$. Jeden krajní bod je $-\infty$ nebo $+\infty$, a tedy příslušným směrem řešení prodloužit nelze. V druhém krajním bodě má řešení limitu 0, a tudíž případné prodloužení tam musí mít hodnotu 0. Z rovnice ovšem plyne, že hodnoty 0 může řešení nabývat jen v bodě $x = 0$. To však není náš případ, a tedy i řešení příslušná $c < 0$ jsou maximální.

Zbývá prozkoumat řešení příslušná $c = 0$. To jsou řešení

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in (0, +\infty); & y_2(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in (0, +\infty); \\ y_3(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in (-\infty, 0); & y_4(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in (-\infty, 0). \end{aligned}$$

Všechna tato řešení mají v bodě 0 limitu 0 (pro y_1 a y_2 uvažujeme limitu zprava, pro y_3 a y_4 limitu zleva), proto funkce, která bude definována jako y_3 nebo y_4 na $(-\infty, 0)$, jako 0 v bodě 0 a jako y_1 nebo y_2 na $(0, +\infty)$ bude řešením naší rovnice v případě, že v bodě 0 bude mít vlastní derivaci. (Pak má totiž vlastní derivaci v každém bodě $\mathbb{R}$, na $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$ rovnici splňuje, protože se tam shoduje s nějakým řešením, a v bodě 0 ji splňuje též, o čemž se snadno přesvědčíme dosazením.) V našem případě pro všechny čtyři kombinace vyjde v 0 derivace 0 (například proto, že „slepené“ funkce jsou v bodě 0 spojité a všechny z funkcí $y_1, \ldots, y_4$ mají v bodě 0 z příslušné strany limitu derivace rovnu 0). Dostáváme tedy čtyři maximální řešení:

$$\begin{aligned} y_1^m(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in \mathbb{R}; & y_2^m(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in \mathbb{R}; \\ y_3^m(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}x|x|, \; x \in \mathbb{R}; & y_4^m(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x|x|, \; x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(1f) Všechna maximální řešení jsou tudíž tato čtyři a výše spočtená řešení příslušná $c \neq 0$ (pro $c > 0$ je to jedno řešení definované na $\mathbb{R}$, pro $c < 0$ dvě řešení definovaná na menších intervalech). ■

P ř í k l a d Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' \cos y = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Řešení. Funkce $\frac{1}{\cos^2 x}$ není definována v bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Navíc si všimněme, že rovnice nemůže být splněna, pokud $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro každé řešení $y\colon I \to \mathbb{R}$ musí proto platit $I \subset I_k$ a $y(I) \subset I_n$ pro nějaká $k, n \in \mathbb{Z}$, kde $I_k = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Uvažujme $k, n \in \mathbb{Z}$ pevná.

Označme g_k restrikci funkce $\frac{1}{\cos^2 x}$ na I_k a h_n restrikci funkce $\cos y$ na I_n. Najdeme nějaké primitivní funkce $G_k\colon I_k \to \mathbb{R}$ ke g_k a $H_n\colon I_n \to \mathbb{R}$ k h_n. Např. $G_k(x) = \operatorname{tg} x$ pro $x \in I_k$ a $H_n(y) = \sin y$ pro $y \in I_n$. Řešíme nyní pro $c \in \mathbb{R}$ úlohu najít všechny funkce $y = y(x)$ definované na maximálním možném otevřeném intervalu $I \subset I_k$ s hodnotami v I_n tak, aby byla splněna rovnost $\sin y(x) = \operatorname{tg} x + c$ pro $x \in I$. Nutně musí být $\operatorname{tg} x + c \in (-1, 1)$, a tedy $x \in (k\pi + \operatorname{arctg}(-1-c), k\pi + \operatorname{arctg}(1-c))$. Řešíme-li rovnici $\sin y_{k,c,n}(x) = \operatorname{tg} x + c$, pro $x \in I_k$ a $y_{k,c,n}(x) \in I_n$, dostáváme, že

$$y_{k,c,n}(x) = n\pi + (-1)^n \arcsin(\operatorname{tg} x + c)$$

na intervalu $(k\pi + \operatorname{arctg}(-1-c), k\pi + \operatorname{arctg}(1-c))$ jsou všechna maximální řešení dané rovnice.

■

P ř í k l a d Popište všechna neomezená maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{y^2}{1+x^2}.$$

Řešení. Rovnice není ve tvaru uvedeném na začátku tohoto paragrafu. Budeme-li se ovšem zajímat o řešení (ne nutně maximální) $y\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, která na (a,b) nenabývají hodnotu nula, můžeme zřejmě řešit rovnici $y'\frac{1}{y^2} = \frac{1}{1+x^2}$. Výše popsaná metoda vede na rovnici

$-\frac{1}{y} = \operatorname{arctg} x + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Pokud je tedy pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ funkce $\operatorname{arctg} x + c$ nenulová na intervalu (a,b), je funkce $y(x) = -\frac{1}{\operatorname{arctg} x + c}$ řešením naší rovnice na tomto intervalu. Vrátíme-li se k naší původní rovnici, povšimneme si, že identicky nulová funkce je jejím řešením. Dále si povšimneme, že žádné z nenulových řešení nemá ani v jednom krajním bodě limitu nula. Proto neexistuje řešení, které se rovná nulovému řešení na nějakém intervalu a jinému řešení na jiném intervalu (zkuste si to promyslet podrobně). Pro

2a $y' = x \sqrt[3]{1-y}$

$I = \mathbb{R}$ $h(x)$ $g(y)$ $\mathbb{R}$

$y_0 \equiv 1$ na $\mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-y}}\,dy = \int x\,dx$$

$g(y) \neq 0$ na $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ $= J$

$$-\frac{3}{2}(1-y)^{2/3} = \frac{1}{2}x^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[3]{(1-y)^2} = -\frac{x^2}{3} + c \quad \to \text{ musí být } > 0$$

≥ 0

$$(1-y)^2 = \left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3$$

$$(1-y) = \pm\sqrt{\left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3}$$

$$1 \pm \sqrt{\left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3} = y \qquad c \in \mathbb{R} \quad ; \quad c \geq \frac{x^2}{3} \qquad \sqrt{3c} \geq |x|$$

Rozbor:
- $c \leq 0$ nelze (prázdný / 1bodový def. obor)
- $c > 0$ $\to$ $x < \sqrt{3c}$, $x > -\sqrt{3c}$ $\quad x \in (-\sqrt{3c}, \sqrt{3c})$

- pro $x \to \pm\sqrt{3c}$ dostáváme $\lim\limits_{x \to \pm\sqrt{3c}} 1 \pm \sqrt{\left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3} = 1$

$\to$ budeme lepit

Celkem

$y_0 \equiv 1 \qquad x \in \mathbb{R}$

$$y_1 = \begin{cases} 1 & x \geq \sqrt{3c} \\ 1 + \sqrt{\left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3} & x \in (-\sqrt{3c}, \sqrt{3c}) \\ 1 & x \leq -\sqrt{3c} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 & x \geq \sqrt{3c} \\ 1 - \sqrt{\left(c - \frac{x^2}{3}\right)^3} & x \in (-\sqrt{3c}, \sqrt{3c}) \\ 1 & x \leq -\sqrt{3c} \end{cases}$$

2b $y' = x\sqrt{y}$

$g(y) = \sqrt{y}$

$h(x) = x \qquad D_h = \mathbb{R} = I$

(2) $y_0 \equiv 0 \qquad x \in \mathbb{R}$

(3) $g \neq 0$ na $(0, \infty) = J$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int x \, dx$

$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + k \qquad k \in \mathbb{R}$

$\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + k \rightarrow$ musí být $> 0 \qquad$ ($G(J) = (0,\infty)$

$y = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \qquad 2\sqrt{y} \quad (0,\infty) \rightarrow (0,\infty)$)

$\frac{x^2}{4} + k > 0 \qquad x^2 > -4k \qquad$ " $|x| > \sqrt{-4k}$ "

(5) Rozbor: $y = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2$ • $k > 0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$

• $k \leq 0 \qquad x > \sqrt{-4k} \qquad x \in (\sqrt{-4k}, \infty)$

$-\sqrt{-4k} \qquad \sqrt{4k} \qquad x < -\sqrt{-4k} \qquad x \in (-\infty, -\sqrt{-4k})$

(6) závěr: $y_0 \equiv 0 \qquad x \in \mathbb{R}$

$y_1 = \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 \qquad x \in \mathbb{R}$ pro $k > 0$ (nelze slepit, není je max.)

$$y_2 = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -\sqrt{-4k}] \\ \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 & x \in (-\sqrt{-4k}, \infty) \end{cases} \qquad k \leq 0$$

$$y_3 = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 & x \in (-\infty, -\sqrt{-4k}) \\ 0 & x \in [\sqrt{-4k}, \infty) \end{cases}$$

$$y_4 = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 & x \in (-\infty, -\sqrt{-4k}) \\ 0 & [-\sqrt{-4k}, \sqrt{-4k}] \\ \left(\frac{x^2}{4} + k\right)^2 & (\sqrt{-4k}, \infty) \end{cases}$$

(2c) $\quad y' \sin x = 2y \ln y$

"jako" $\quad y' = \underbrace{2y\ln y}_{g(y)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{h(x)} \quad \to x \in \underbrace{(0+k\pi, \pi+k\pi)}_{I} \quad k\in\mathbb{Z}$

↳ nulové body $\quad y=0 \to$ nelze kvůli logaritmu

$y \equiv 1 \qquad J = (0,1)$

$\qquad\qquad\quad = (1,\infty)$

$$\int \frac{1}{2y\ln y}\,dy = \int \frac{1}{\sin x}\,dx \quad \to \text{výpočet minule (5d)}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\ln|\ln y|}_{G(y)} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

↳ $\cos x \neq 1 \quad x \neq 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$\cos x \neq -1 \quad x \neq \pi + 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$G(0,1) = \mathbb{R}$

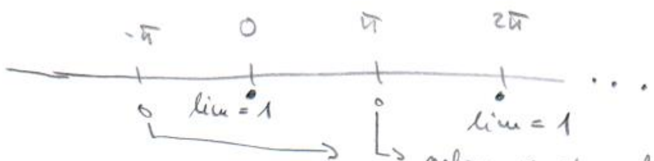
$G(1,\infty) = \mathbb{R}$

$$\ln|\ln y| = \ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c$$

$$|\ln y| = \underbrace{e^c}_{>0} \cdot \left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|$$

$$\ln y = \underbrace{c}_{\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$$

značme $\quad z_c(x) := y = e^{c\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)} \qquad c\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad x \neq k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$



↳ nelze slepit, $\lim = \begin{cases} 0 & c<0 \\ \infty & c>0 \end{cases}$

$x \in (0+2k\pi, \pi+2k\pi)$

$x \in (\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi) \quad k\in\mathbb{Z}$

Závěr

$y_0 \equiv 1 \qquad x \in \mathbb{R}$

$$y_1 = \begin{cases} 1 & x \in (-\infty, 2k\pi] \\ z_c(x) & x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi) \end{cases} \qquad \begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{matrix}$$

$$y_2 = \begin{cases} z_c(x) & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \\ 1 & x \in [2\pi + 2k\pi, \infty) \end{cases} \qquad \begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{matrix}$$

$$y_3 = \begin{cases} z_{c_1}(x) & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \\ 1 & x \in [2\pi + 2k\pi, 2\pi + 2l\pi] \\ z_{c_2}(x) & x \in (2\pi + 2l\pi, 3\pi + 2l\pi) \end{cases} \qquad \begin{matrix} c_{1,2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ k \leq l \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

(2d)

$$y' = \underbrace{x}_{h(x)}\, \underbrace{e^{-y}\sqrt[3]{e^{y}-1}}_{g(y)}$$

$x \in \mathbb{R}$

$y_0 \equiv 0 \quad x \in \mathbb{R}$

$g \neq 0$ na $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ $= J$

$$\int \frac{e^{y}}{\sqrt[3]{e^{y}-1}}\, dy = \int x\, dx$$

$$\frac{3}{2} \underbrace{\sqrt[3]{(e^{y}-1)^2}}_{\in (0,\infty)} = \frac{x^2}{2} + k$$

$$\sqrt[3]{(e^{y}-1)^2} = \frac{x^2}{3} + k$$ → musí být > 0

$$(e^{y}-1)^2 = \left(\frac{x^2}{3}+k\right)^3$$

! pozor při odmocňování

$$e^{y} = 1 \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{3}+k\right)^3} > 0$$

$$y = \ln\left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{3}+k\right)^3}\right)$$

Rozbor

$k > 0 \quad x \in \mathbb{R}$ → $\underline{y = \ln\left(1 + \sqrt{\left(\frac{x^2}{3}+k\right)^3}\right)}$

$k \leq 0 \quad x \in (-\infty, -\sqrt{-3k})$

$x \in (\sqrt{-3k}, \infty)$

pro $\ln\left(\underbrace{1 - \sqrt{\left(\frac{x^2}{3}+k\right)^3}}_{>0}\right)$ máme:

$k \leq 0$:

$1 > \frac{x^2}{3} + k$

$3 - 3k > x^2 > 0$

tedy funguje pro $\boxed{k < 1}$

$|x| < \sqrt{3-3k}$

tedy $0 < k < 1$ $\quad y = \ln(1 - \sqrt{\quad}),\quad x \in (-\sqrt{3-3k}, \sqrt{3-3k})$

pro $k \leq 0$ $\quad x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{-3k})$

$x \in (\sqrt{-3k}, \sqrt{-3k+3})$

Bez lepení:

$$y_0 = 0 \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$y_1 = \ln(1+\sqrt{}) \qquad x \in \mathbb{R};\ k>0$$

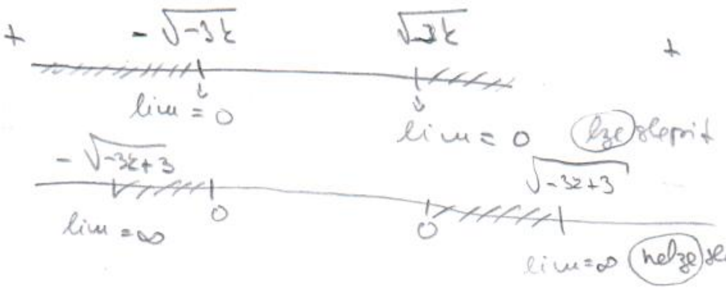
$$y_2 = \ln(1-\sqrt{}) \qquad x \in (-\sqrt{3-3k}, \sqrt{3-3k});\ k \in (0,1)$$

↳ nelze slepit, $\lim_{x \to \pm\sqrt{3-3k}} = \infty$

lepení

označme $z_k^+(x) = \ln(1+\sqrt{})$ $\quad k \le 0$:

$z_k^-(x) = \ln(1-\sqrt{})$



kombinace: vždy $k \le 0$ $\quad l \le 0$

$$y = \begin{cases} z_k^+(x) & x \in (-\infty, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & x \in [-\sqrt{-3k}, \infty) \end{cases} \qquad y = \begin{cases} z_k^-(x) & (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, \sqrt{-3k}] \\ z_k^+(x) & x \in (\sqrt{-3k}, \infty) \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 0 & (-\infty, \sqrt{-3k}] \\ z_k^-(x) & (\sqrt{-3k}, \sqrt{3-3k}) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^+ & x \in (-\infty, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \sqrt{-3k}] \\ z_k^+ & (\sqrt{-3k}, \infty) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^+ & x \in (-\infty, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \sqrt{-3l}] \\ z_k^- & (\sqrt{-3l}, \sqrt{3-3l}) \end{cases} \qquad y \in \begin{cases} z_k^- & x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \sqrt{-3l}] \\ z_k^- & (\sqrt{-3l}, \sqrt{3-3l}) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} z_k^- & x \in (-\sqrt{3-3k}, -\sqrt{-3k}) \\ 0 & [-\sqrt{-3k}, \sqrt{-3l}] \\ z_k^+ & (\sqrt{-3l}, \infty) \end{cases}$$