

$$(1) \quad y = x y' - (y')^2$$

$$y_1(x) = x - 1 \quad y_2 = 2x - 4$$

$$y_3 = -3x - 9$$

$$(1a) \quad y' = 1$$

$$x - 1 \stackrel{?}{=} x \cdot 1 - 1^2 \quad \checkmark$$

$$(1c) \quad y' = -3$$

$$-3x - 9 \stackrel{?}{=} x \cdot (-3) - 9 \quad \checkmark$$

$$(1b) \quad y' = 2$$

$$2x - 4 \stackrel{?}{=} x \cdot 2 - 4 \quad \checkmark$$

1a

$$y' = 2x \quad y(1) = 2$$

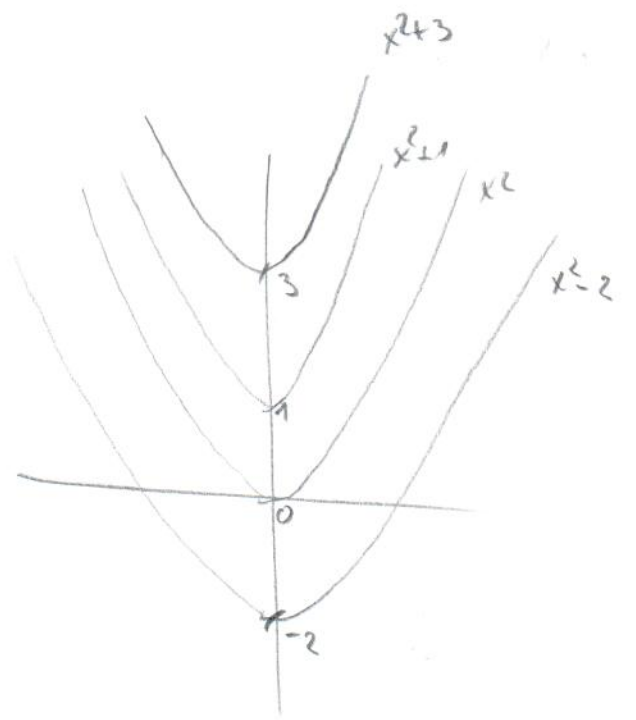
$$y = x^2 + c$$

$x \in \mathbb{R}$
 $c \in \mathbb{R}$

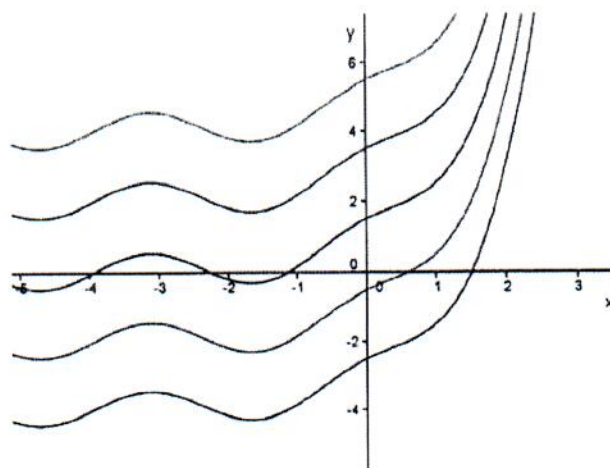
$$y(1) = 2$$

$$1^2 + c = 2$$
$$c = 1$$

$$y = x^2 + 1$$



Grafické řešení DR od zdola pro $C = -4, -2, 0, 2, 4$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 2.3

$$y' = \frac{1}{x-2}$$

Řešení DR

zde musíme určit podmínku, že $x \neq 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-2}$$

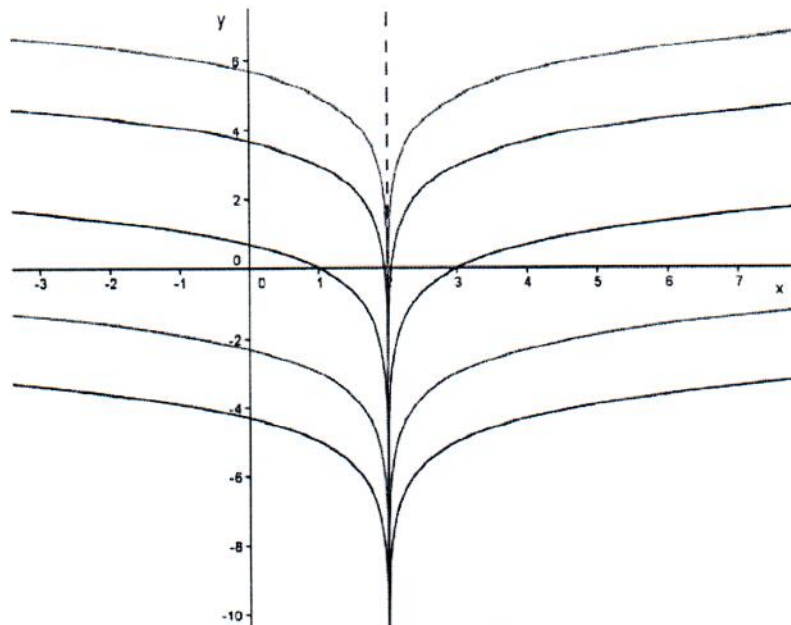
$$\int dy = \int \frac{1}{x-2} dx$$

$$y = \ln|x-2| + C$$

kde $x \neq 2, C \in \mathbb{R}$.

(2b)

26

Grafické řešení DR od zdola pro $C = -5, -3, 0, 3, 5$ 

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = 2$.

Příklad 2.4 $y' = \sqrt{3x}$

Řešení DR

zde stanovíme podmínku $x \geq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3x}$$

$$\int dy = \int \sqrt{3x} dx$$

$$\int dy = \sqrt{3} \int \sqrt{x} dx$$

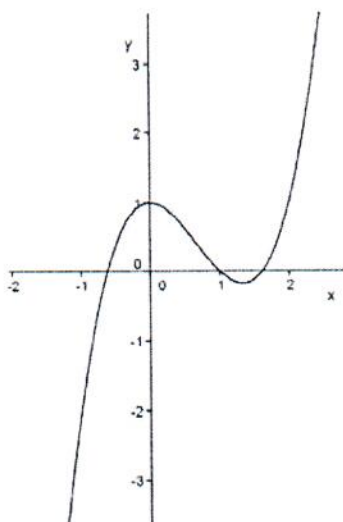
$$y = \sqrt{3} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{3x^3} + C$$

kde $x \geq 0, C \in \mathbb{R}$.

hledané partikulární řešení je $y = x^3 - 2x^2 + 1$

Grafické řešení:



(2c)

Příklad 2.7

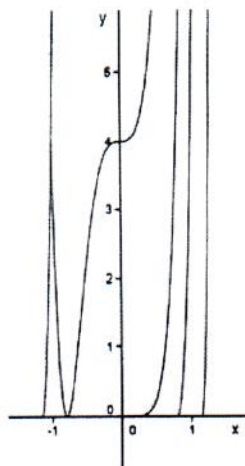
$$y' = -2 \frac{1}{x^3}, y(0) = 2$$

Řešení DR

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -2 \frac{1}{x^3} \\ \int dy &= \int -2 \frac{1}{x^3} dx \\ y &= \frac{1}{x^2} + C \end{aligned}$$

kde $x \neq 0, C \in \mathbb{R}$. Nyní zjistíme hodnotu konstanty s využitím počátečních podmínek $x = 0$ a $y = 2$. Takové řešení však nenajdeme, protože do funkce nelze dosadit $x = 0$. Hledané partikulární řešení neexistuje. Tuto rovnici jsme ani nemuseli řešit, protože je vidět ze zadání podmínka $x \neq 0$ a počáteční podmínka $y(0) = 2$ a takovou úlohu nemá smysl řešit.

Grafické řešení pro $C = -3, -1, 0, 1, 3$:



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou polorovinu pro $y > 0$.

(3a)

Příklad 3.13

$$\frac{y'}{y^2} = e^x$$

Řešení DR

zde musíme vyřadit funkci $y = 0$

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int e^x dx$$

$$-\frac{1}{y} = e^x + C$$

řešením jsou tedy všechny funkce:

$$y = -\frac{1}{e^x + C}$$

nyň musíme stanovit podmínku ($e^x + C \neq 0$)

$$e^x + C \neq 0$$

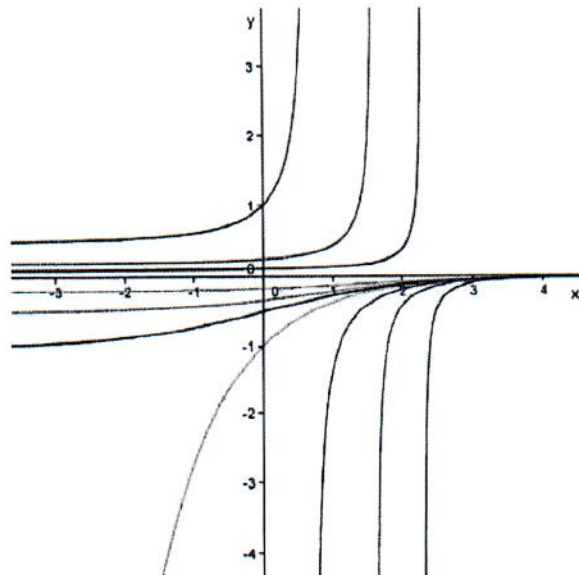
$$e^x \neq -C$$

pro $C \geq 0$ je podmínka vždy splněna a pro $C < 0$ existuje jedno x , pro které řešení $y = -\frac{1}{e^x + C}$ není definováno $x = \ln(-C)$, řešením pak jsou všechny funkce:

$$y = -\frac{1}{e^x + C}$$

kde $x \in \mathbb{R}$ pro $C \geq 0$, nebo $x \in \mathbb{R} - \{\ln(-C)\}$ pro $C < 0$.

Grafické řešení pro $C = -10, -5, -2, 0, 1, 2, 5$:



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $y = 0$.

$$y(0) = 1/2$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{e^0 + C}$$

$$\Rightarrow 1 + C = -2$$

$$C = -3$$

$$y = -\frac{1}{e^x - 3}$$

Příklad 3.14

$$y^4 y' = 2x^4$$

Řešení DR

$$y^4 \frac{dy}{dx} = 2x^4$$

$$\int y^4 dy = \int 2x^4 dx$$

3b)

Příklad 3.2

$$y^2 y' = x - 2$$

Řešení DR

$$y^2 \frac{dy}{dx} = x - 2$$

$$\int y^2 dy = \int (x - 2) dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} - 6x + 3C$$

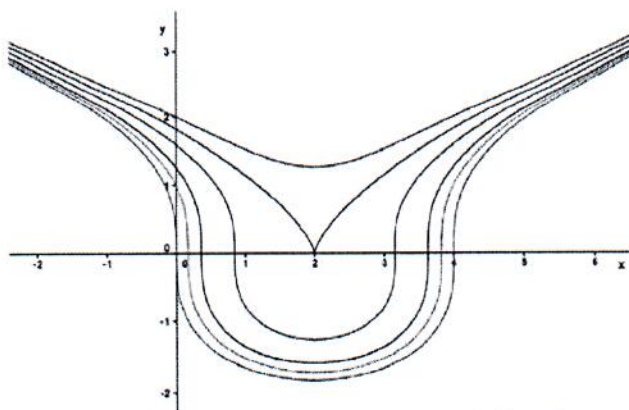
$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} - 6x + 3C}$$

protože konstanta vynásobená reálným číslem je opět konstanta, budeme psát jednodušeji místo $3C$ pouze konstantu C . (U dalších příkladů již budu rovnou přecházet ke konstantě C , bez dalších komentářů.)

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} - 6x + C}$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro $C = 0, 1, 2, 4, 6, 8$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

(3c)

Příklad 3.3

$$\frac{y'}{y} = 4x$$

Řešení DR

zde musíme vyřadit funkci $y = 0$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 4x$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 4x dx$$

$$\ln|y| = 2x^2 + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{2x^2+C}$$

$$|y| = e^{2x^2+C}$$

$$y = \pm e^C \cdot e^{2x^2}$$

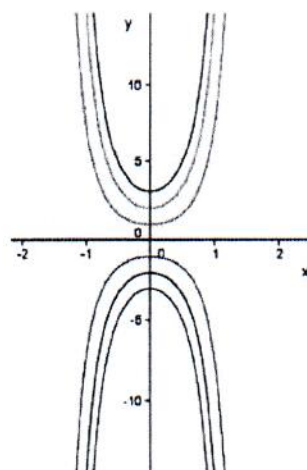
kde $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, protože $C \in \mathbb{R}$, $e^C \in (0; \infty)$ a $-e^C \in (-\infty; 0)$, pak konstanta K nabývá hodnot $K \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty) \Rightarrow K \neq 0$ a řešením jsou tedy všechny funkce:

$$y = K \cdot e^{2x^2}$$

pak $x \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$.

Grafické řešení pro $K = -3, -2, -1, 1, 2, 3$



$$\begin{aligned} y(0) &= 3 \\ 3 &= ke^0 \quad k=3 \\ \rightarrow y &= 3e^{2x^2} \end{aligned}$$

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $y = 0$.

3d

Příklad 3.4

$$y' = 4xy$$

Řešení DR

$$\frac{y'}{y} = 4x$$

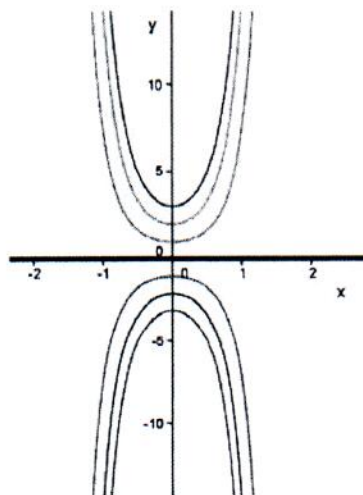
V předchozím kroku jsme dělili rovnici y a musíme stanovit podmínku $y \neq 0$, tím se připravíme o jedno řešení (singulární řešení) – nulovou funkci. (Derivace nulové funkce je rovna nule, $y = 0$ a $y' = 0$ rovnici $y' = 4xy$ vyhovují.)

Řešení upravené rovnice je totožné s řešením př. 2, vyšlo nám $y = K \cdot e^{2x^2}$, kde $x \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$. Nyní se podíváme, zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = K \cdot e^{2x^2}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$. Řešením jsou tedy všechny funkce

$$y = K \cdot e^{2x^2}$$

pak $x \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro $K = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

3e)

Příklad 3.6

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1}$$

Řešení DR

musíme určit podmínku, že $x \neq 1$ a vyřadit funkci $y = 0$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$\ln|y| = \ln|x-1| + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x-1|+C}$$

$$|y| = e^C \cdot e^{\ln|x-1|}$$

$$y = \pm e^C \cdot (x-1)$$

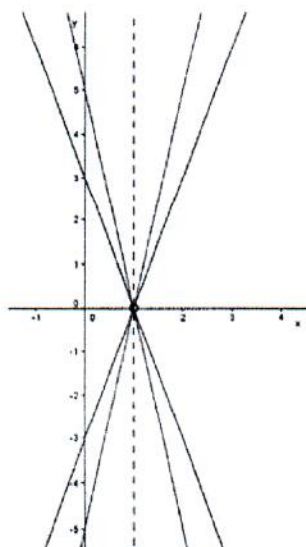
kde $x \neq 1, C \in \mathbb{R}$.

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$

$$y = K \cdot (x-1)$$

pak $x \neq 1, K \neq 0$.

Grafické řešení pro $K = -5, -3, 3, 5$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímkou $y = 0$ a $x = 1$.

(37)

Příklad 3.7

$$y^2 y' = \cos x$$

Řešení DR

$$y^2 \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\int y^2 dy = \int \cos x dx$$

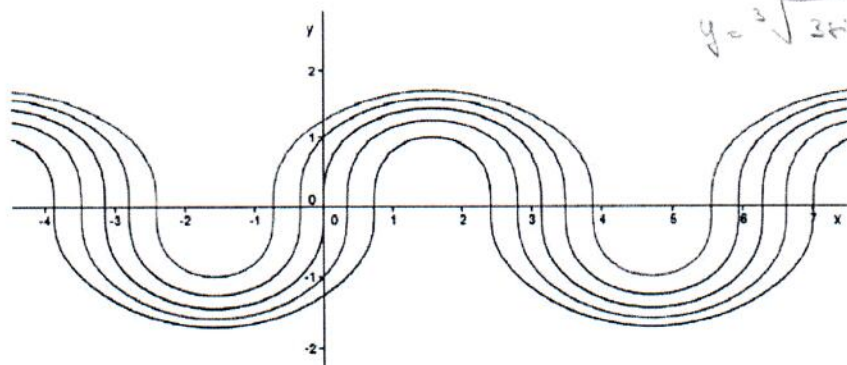
$$\frac{y^3}{3} = \sin x + C$$

$$y^3 = 3 \sin x + C$$

$$y = \sqrt[3]{3 \sin x + C}$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro $C = -2, -1, 0, 1, 2$



$$y(0) = -2$$

$$-2 = \sqrt[3]{0+C}$$

$$-8 = C$$

$$y = \sqrt[3]{3 \sin x + C}$$

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

(38)

Příklad 3.8

$$e^y y' = 1$$

Řešení DR

$$\int e^y dy = \int dx$$

$$e^y = x + C$$

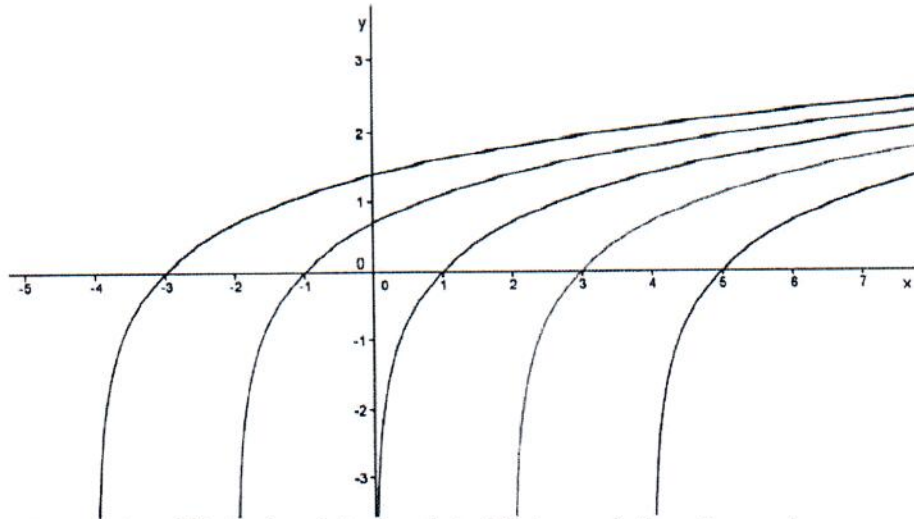
$$\ln e^y = \ln(x + C)$$

$$y = \ln(x + C)$$

kde $x > -C, C \in \mathbb{R}$.

(3g)

Grafické řešení pro $C = -4, -2, 0, 2, 4$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 3.9 $y' = y$

Řešení DR

$$\frac{dy}{dx} = y$$
$$\int \frac{1}{y} dy = \int dx$$

při této úpravě bychom přišli o jedno (singulární) řešení $y = 0$

$$\ln|y| = x + C$$
$$y = \pm e^{x+C}$$
$$y = \pm e^C \cdot e^x$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$, ale zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$

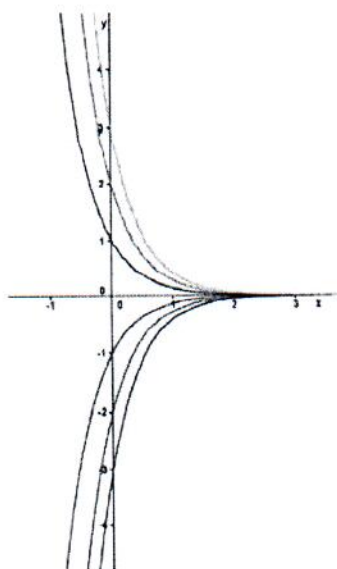
$$y = K \cdot e^x$$

podíváme se zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = K \cdot e^x$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$. Řešením jsou tedy všechny funkce

$$y = K \cdot e^x \text{ a } y = 0$$

kde $x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro $K = -3, -2, -1, 1, 2, 3$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $y = 0$.

(32)

Příklad 3.11

$$xy' - y = 0$$

Řešení DR

$$x \frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

při této úpravě bychom přišli o jedno (singulární) řešení $y = 0$ a přibude podmínka $x \neq 0$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|y| = \ln|Cx|$$

$$|y| = Cx$$

$$y = \pm Cx$$

(32)

kde $x \neq 0, C \neq 0$, ale zvolíme novou konstantu $K = \pm C$ a řešením jsou tedy všechny funkce:

$$y = Kx.$$

Protože ze zadání neplyne, že $x \neq 0$ ukážeme, že řešení $y = Kx$ vyhovuje všem $x \in \mathbb{R}$. Dosazením řešení do původní rovnice ověříme řešení $x = 0$:

$$x(Kx)' - Kx = 0$$

$$Kx - Kx = 0$$

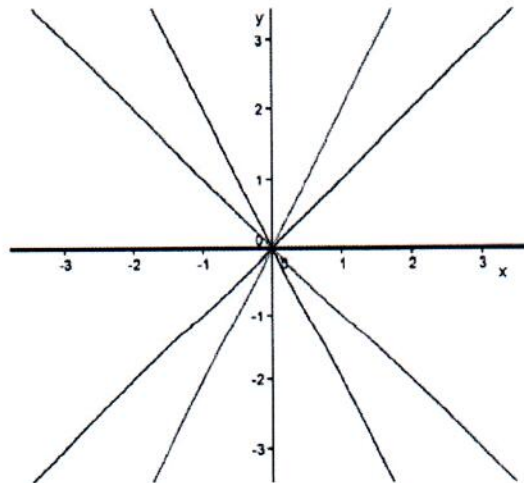
$$0 = 0.$$

Nyní se podíváme zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = K \cdot e^{2x^2}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$. Řešením jsou tedy všechny funkce

$$y = Kx$$

kde $x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro $K = -2, -1, 0, 1, 2$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

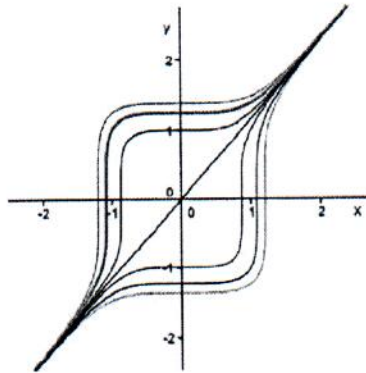
$$\frac{y^5}{5} = \frac{2x^5}{5} + C$$

$$y^5 = 2x^5 + C$$

$$y = \sqrt[5]{2x^5 + C}$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro $C = -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 3.15

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x}$$

Řešení DR

zde musíme určit podmínku, že $x \neq 0$ a vyřadit funkci $y = 0$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = 2 \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|y| = 2 \ln|x| + \ln|C|$$

$$|y| = x^2 \cdot C$$

$$y = \pm C \cdot x^2$$

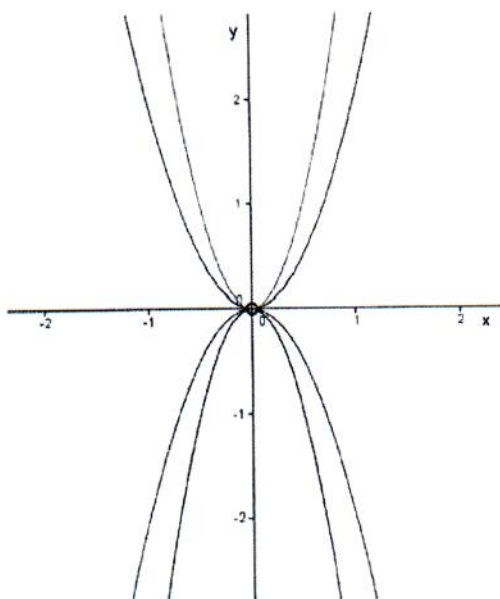
zvolíme novou konstantu $K = \pm C$ a $K \neq 0$, pak řešením jsou všechny funkce:

$$y = K \cdot x^2$$

kde $x \neq 0, K \neq 0$.

(3r)

Grafické řešení pro $K = -4, -2, 2, 4$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímek $x = 0, y = 0$.

Příklad 3.16

$$2yy' = -\sin x$$

Řešení DR

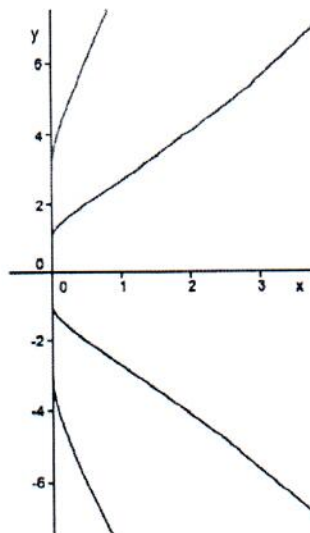
$$2y \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$2 \int y dy = \int -\sin x dx$$

$$2 \frac{y^2}{2} = \cos x + C$$

$$y^2 = \cos x + C$$

Grafické řešení pro $K = -3, -1, 1, 3, 0$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou polovinu pro $x \geq 0$ a přímku $y = 0$.

(3.)

Příklad 3.18

$$xy' - \frac{y}{x+1} = 0$$

Řešení DR

zde stanovíme podmínku pro $x \neq -1$

$$xy' = \frac{y}{x+1}$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x(x+1)}$$

při této úpravě bychom přišli o jedno (singulární) řešení $y = 0$, musíme určit tyto podmínky $x \neq 0$ a $x \neq -1$ a pravou stranu rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = Ax + A + Bx$$

$$x^0: 1 = A$$

$$x^1: 0 = A + B$$

$$0 = 1 + B$$

$$B = -1$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| - \ln|x+1| + \ln|C|$$

$$\ln|y| = \ln \left| \frac{Cx}{x+1} \right|$$

$$|y| = \frac{Cx}{x+1}$$

$$y = \pm \frac{Cx}{x+1}$$

yní zvolíme novou konstantu $K = \pm C$, kde $K \neq 0$. Řešením budou všechny funkce:

$$y = \frac{Kx}{x+1}$$

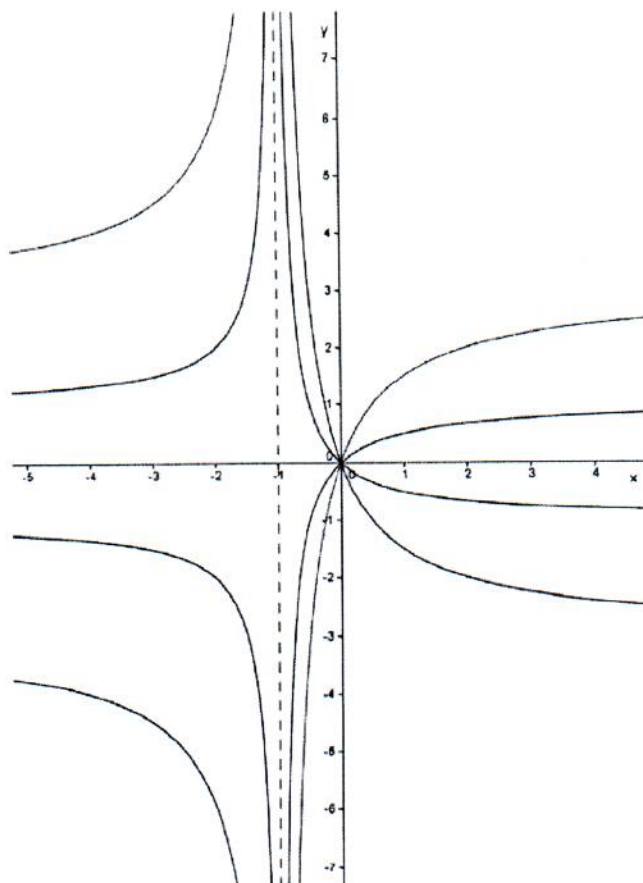
Podíváme se, zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = \frac{Kx}{x+1}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$. Protože ze zadání neplyne podmínka, že $x \neq 0$ je nutné tuto podmínku ověřit (viz příklad 3.11- necht' čtenář ověří sám), po ověření $\Rightarrow x = 0$ a řešením jsou všechny funkce

$$y = \frac{Kx}{x+1}$$

kde $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $K \in \mathbb{R}$.

(31)

Grafické řešení pro $K = -3, -1, 1, 3, 0$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = -1$.

(32)

Příklad 3.19

$$xy' + y + y^2 = 0$$

Řešení DR

$$xy' = -y - y^2$$

$$y' = -\frac{y + y^2}{x}$$

$$\frac{y'}{y(1 + y)} = -\frac{1}{x}$$

(32)

$$\frac{1}{y(1+y)} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$$

při této úpravě bychom přišli o dvě (singulární) řešení $y = 0$ $y = -1$, určíme podmínku $x \neq 0$ a levou stranu rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{1}{y(1+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y}$$

$$1 = A + Ay + By$$

$$x^0: \quad 1 = A$$

$$x^1: \quad 0 = A + B$$

$$0 = 1 + B$$

$$B = -1$$

$$\int \frac{1}{y} dy - \int \frac{1}{1+y} dy = - \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|y| - \ln|1+y| = -\ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln \left| \frac{y}{1+y} \right| = \ln \left| \frac{C}{x} \right|$$

$$\left| \frac{y}{1+y} \right| = \frac{C}{x}$$

$$\frac{y}{1+y} = \pm \frac{C}{x}$$

yní určíme novou konstantu $K = \pm C$ a $K \in \mathbb{R}$

$$\frac{y}{1+y} = \frac{K}{x}$$

$$y = \frac{K}{x} + \frac{K}{x}y$$

$$y - \frac{K}{x}y = \frac{K}{x}$$

$$y \left(1 - \frac{K}{x} \right) = \frac{K}{x}$$

$$y = \frac{K}{x \left(1 - \frac{K}{x} \right)}$$

$$y = \frac{K}{x - K}$$

(32)

Podíváme se, zda vhodnou volbou konstanty K nezískáme singulární řešení $y = 0$ z obecného řešení $y = \frac{K}{x-K}$. Pro $K = 0$ dostaneme funkci $y = 0$, ale vhodnou volbou konstanty K nezískáme řešení $y = -1$, připišeme jej zvlášť. Protože ze zadání neplyne, že $x \neq 0$ ukážeme, že řešení $y = \frac{K}{x-K}$ vyhovuje všem $x \in \mathbb{R}$. Dosazením řešení do původní rovnice ověříme řešení $x = 0$:

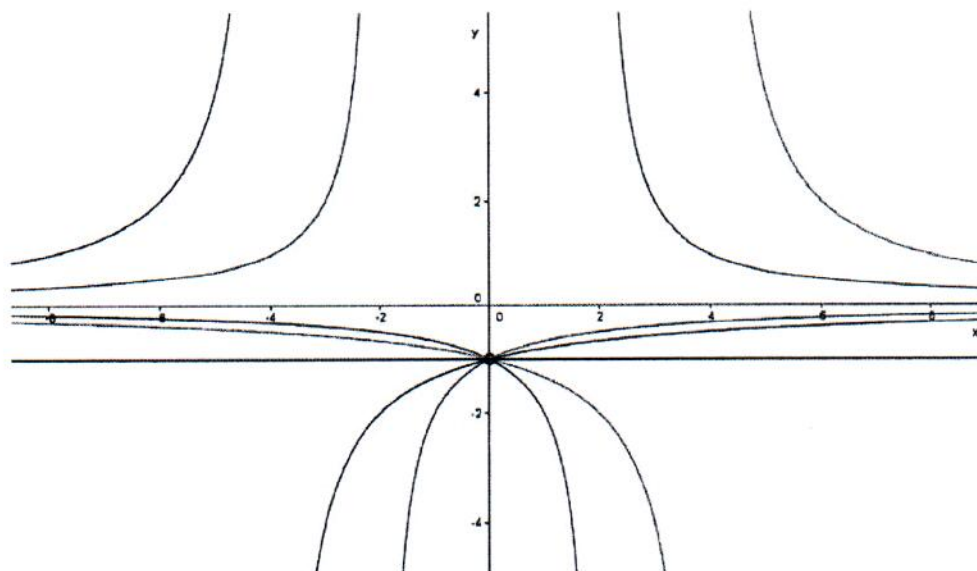
$$\begin{aligned}x \left(\frac{K}{x-K} \right)' + \frac{K}{x-K} + \left(\frac{K}{x-K} \right)^2 &= 0 \\x \left(\frac{-K}{(x-K)^2} \right) + \frac{K}{x-K} + \frac{K^2}{(x-K)^2} &= 0 \\ \frac{-xK}{(x-K)^2} + \frac{xK - K^2 + K^2}{(x-K)^2} &= 0 \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

řešením jsou všechny funkce:

$$y = \frac{K}{x-K} \text{ a } y = -1$$

kde $x \in \mathbb{R}$ a $x \neq K$, $K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro $K = -4, -2, 2, 4, 0$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu.

(3e)

Příklad 3.20 $\frac{1}{y+1} y' = \cotg x$

Řešení DR

ze zadání vidíme, že je nutné vyřadit funkci $y = -1$ z řešení

$$\frac{1}{y+1} \cdot \frac{dy}{dx} = \cotg x$$

$$\int \frac{1}{y+1} dy = \int \cotg x dx$$

Vsuvka: $\int \cotg x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$

$$\ln|y+1| = \ln|\sin x| + \ln|C|$$

$$|y+1| = C \sin x$$

$$y+1 = \pm C \sin x$$

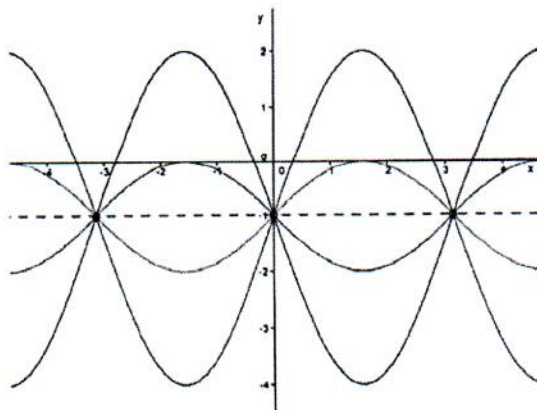
yní zvolíme novou konstantu $K = \pm C$.

$K \neq 0$, protože bychom dostali funkci $y = 0 \cdot \sin x - 1$ a po úpravě funkci $y = -1$, to je podmínka ze zadání. Určíme podmínku $x \neq k \cdot \pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, řešením jsou všechny funkce:

$$y = K \sin x - 1$$

kde $x \neq k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}, K \neq 0$.

Grafické řešení pro $K = -3, -1, 1, 3$



Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $y = -1$.

Diferenciální rovnice – separace proměnných

verze 1.1

1 Úvod

Následující text popisuje řešení diferenciálních rovnic, konkrétně metodu separace proměnných. Měl by sloužit především studentům předmětu MATEMAT1 na Univerzitě Hradec Králové k přípravě na zkoušku. Mohou se v něm vyskytovat některé chyby; autor ocení, když jej na chyby a nejasnosti upozorníte na emailu jiri.lipovskyzavináčuhk.cz.

2 Teorie

Budeme se zabývat rovnicí

$$y' = f(x)g(y)$$

na otevřené množině $\Omega = (a, b) \times (c, d)$. Lze snadno nahlédnout, že tato rovnice má triviální řešení $y_0 = \text{konst.}$ takové, že $g(y_0) = 0$. Vyloučíme-li toto řešení, lze psát

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x)g(y), \\ \frac{1}{g(y)} dy &= f(x) dx, \\ \int \frac{1}{g(y)} dy &= \int f(x) dx.\end{aligned}$$

Obě proměnné jsme separovali, na jednu stranu rovnice jsme dali vše s x , na druhou stranu rovnice vše s y , formálně včetně diferenciálů. Poté jsme obě strany rovnice zintegrovali. Vyřešením integrálů můžeme nalézt řešení diferenciální rovnice.

(4a)

3 Příklady

Příklad 3.1. Najděte řešení rovnice $y' = -y \cot x$

Řešení: Separujeme proměnné a rovnici integrujeme.

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{\cos x}{\sin x} dx.$$

Po integraci dostáváme

$$\ln |y| = - \ln |\sin x| + \ln C.$$

Nesmíme zapomenout na integrační konstantu, kterou jsme zapsali ve tvaru $\ln C$. Po odlogaritmování dostáváme

$$y(x) = \frac{C}{\sin x}.$$

V argumentu logaritmů píšeme absolutní hodnotu, aby definiční obor celého výrazu byl stejný před integrací i po ní.

(4b)

Příklad 3.2. Najděte řešení rovnice $(x-1)y' + y^2 = 0$ s počáteční podmínkou $y(2) = -1$.

Řešení: Rovnici si upravíme do tvaru

$$(x-1) \frac{dy}{dx} = -y^2,$$

což vede k

$$\int \frac{dy}{y^2} = - \int \frac{dx}{x-1}.$$

Po integraci dostáváme

$$-\frac{1}{y} = -\ln(x-1) + C \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - C}.$$

Absolutní hodnotu psát nemusíme, protože nás kvůli počáteční podmínce zajímá jen $x > 1$. Nyní dosadíme počáteční podmínku, z čehož zjistíme konstantu C .

$$-1 = \frac{1}{\ln 1 - C} \Rightarrow C = 1.$$

Hledané řešení tedy je

$$y(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - 1}.$$

(4c)

Příklad 3.3. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$

Řešení: Pokračujeme obdobně jako v předchozích příkladech.

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \Rightarrow \frac{\cos y}{\sin y} dy = \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Po integrování máme

$$\ln(\sin y) = -\ln \cos x + \ln C \Rightarrow \sin y = \frac{C}{\cos x}.$$

Odsud $y(x) = \arcsin \frac{C}{\cos x}$.

Další příklady uvedeme už bez komentáře.

(4d)

Příklad 3.4. Najděte řešení rovnice $y' \sin x = y \cos x$.

(4d) Řešení:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$
$$\ln |y| = \ln |\sin x| + \ln C,$$
$$y = C \sin x.$$

(4e) **Příklad 3.5.** Najděte řešení rovnice $x^2 y' - y^2 = 1$.
Řešení:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{1}{x^2} dx,$$
$$\operatorname{arctg} x = -\frac{1}{x} + C,$$
$$y = \operatorname{tg} \left(C - \frac{1}{x} \right).$$

(4f) **Příklad 3.6.** Najděte řešení rovnice $2xyy' = x + 2$.
Řešení:

$$\int y dy = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} \right) dx,$$
$$\frac{y^2}{2} = \frac{x}{2} + \ln |x| + C,$$
$$y = \pm \sqrt{x + 2 \ln |x| + C}.$$

(4g) **Příklad 3.7.** Řešte rovnici $(xy^2 + x) + (y - x^2 y)y' = 0$.
Řešení:

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \int \frac{y}{y^2 + 1} dy,$$
$$\ln |x^2 - 1| = \ln |y^2| + 1 + \ln C$$
$$1 + y^2 = C(x^2 - 1),$$
$$y = \pm \sqrt{C(x^2 - 1) - 1}.$$

Příklad 3.8. Řešte rovnici $xyy' = 1 - x^2$.
Řešení:

$$\int y dy = \int \left(\frac{1}{x} - x \right) dx,$$
$$\frac{y^2}{2} = \ln |x| - \frac{x^2}{2} + C,$$
$$y = \pm \sqrt{2 \ln |x| - x^2 + C_1}.$$

(4a)

Příklad 3.9. Řešte rovnici $xy + (x+1)y' = 0$.

Řešení:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{x}{x+1} dx = - \int 1 dx + \int \frac{1}{x+1} dx,$$
$$\ln |y| = -x + \ln |x+1| + \ln C,$$
$$y = C(x+1)e^{-x}.$$

Příklad 3.10. Řešte rovnici $\sqrt{y^2+1} = xy y'$.

Řešení:

$$\int \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} dy = \int \frac{1}{x} dx,$$
$$\sqrt{y^2+1} = \ln |x| + C,$$
$$y = \pm \sqrt{(C + \ln |x|)^2 - 1}.$$

4 Rovnice typu $y' = f(ax + by + c)$

Tato rovnice lze převést na rovnici se separovanými proměnnými substitucí $z(x) = ax + by + c$. Odsud dostáváme $y' = \frac{z'-a}{b}$. Dosadíme-li tento výraz zpět do původní rovnice, dostaneme rovnici

$$\frac{z'-a}{b} = f(z) \Rightarrow \frac{dz}{a+bf(z)} = dx,$$

kterou vyřešíme integrací.

Příklad 4.1. Vyřešte rovnici $y' = y - 3x + 5$

Řešení: Zřejmě použijeme $f(z) = z = y - 3x + 5$, odsud $z' = y' - 3$, tj. $z' = z - 3$.

$$\int \frac{dz}{z-3} = \int dx,$$
$$\ln |z-3| = x + \ln C,$$
$$z(x) = C e^x + 3,$$
$$y(x) = C e^x + 3x - 2.$$

Příklad 4.2. Vyřešte rovnici $y' = -(x-y)^2$

Řešení: Zvolíme $z = x - y$, $z' = 1 - y'$, $f(z) = -z^2$. Po substituci obdržíme

$$1 - z' = -z^2,$$
$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx,$$
$$\operatorname{arctg} z = x + C,$$
$$z = \operatorname{tg}(x + C),$$
$$y(x) = x - \operatorname{tg}(x + C).$$

$$(5a) \quad y' = x e^x y$$

$$y(1) = 1$$

$$\text{Stac. } y \equiv 0$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x e^x dx$$

$$\text{Per. p. } \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$
$$\begin{array}{l} u \quad v' \\ u'=1 \quad v=e^x \end{array} \quad = x e^x - e^x$$

$$\ln|y| = x e^x - e^x + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$|y| = k e^{x e^x - e^x} \quad k > 0$$

$$y = k e^{e^x(x-1)} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

podany:

$$y(1) = 1 \quad \text{stac. melzo, stac. tazy ne}$$

$$1 = y(1) = k e^{e^1(1-1)} \quad k = 1$$

$$\text{paž } y = e^{e^x(x-1)} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(5b) \quad y' = xy(y+2)$$

imp. beding: $y \equiv 0$
 $y \equiv -2$

$$\int \frac{1}{y(y+2)} dy = \int x dx$$

$$\int \frac{1}{y(y+2)} dy = \int \frac{-\frac{1}{2}}{y+2} + \frac{\frac{1}{2}}{y} dy$$

$$-\frac{1}{2} \ln|y+2| + \frac{1}{2} \ln|y| = \frac{1}{2} x^2 + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\ln \left| \frac{y}{y+2} \right| = x^2 + k$$

$$\left| \frac{y}{y+2} \right| = k e^{x^2} \quad k > 0$$

$$\frac{y}{y+2} = k e^{x^2} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y(1 - k e^{x^2}) = 2k e^{x^2}$$

$$y = \frac{2k e^{x^2}}{1 - k e^{x^2}} \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$1 - k e^{x^2} \neq 0$$

$$\frac{1}{k} \neq e^{x^2}$$

$$\ln \frac{1}{k} \neq x^2$$

$$\pm \sqrt{\ln \frac{1}{k}} \neq x$$

$$\begin{array}{ll} k=0 & 0^2 \\ k < 0 & 0^2 \\ k > 0 & \end{array}$$

beding: $y \equiv 0$
 $y \equiv -2$

$$y = \frac{2k e^{x^2}}{1 - k e^{x^2}}$$

$$k < 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$k > 0$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{\ln \frac{1}{k}})$$

$$x \in (-\sqrt{\ln \frac{1}{k}}, \sqrt{\ln \frac{1}{k}})$$

$$x \in (\sqrt{\ln \frac{1}{k}}, \infty)$$

$$(5c) \quad y'(1+x^2) = 1+y^2$$

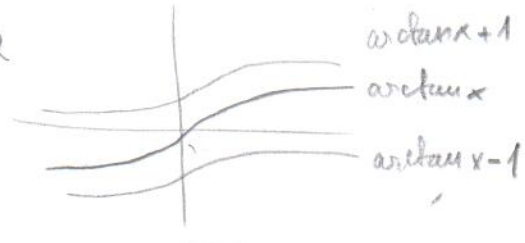
Wemo' stac. Reseui'

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\arctan y = \arctan x + \xi \quad \xi \in \mathbb{R}$$

$$y = \tan(\arctan x + \xi)$$

$$\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



da'voi smysl je u pro
 $-\pi < \xi < \pi$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan x + \xi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\tan\left(-\xi - \frac{\pi}{2}\right) \leq x \leq \tan\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right)$$

Záver

$$y = \tan(\arctan x + \xi) \quad 0 < \xi < \pi \quad x \in (-\infty, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right))$$

$$0 > \xi > -\pi \quad x \in (\tan\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right), \infty)$$

$$y = \tan(\arctan x) = x \quad \xi = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(5d) \quad y' = \sin x \sin y \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

• nulové body: $\sin y = 0 \quad y = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\int \frac{1}{\sin y} dy = \int \sin x dx$$

$$\int \frac{1}{\sin y} = \int \frac{\sin y}{1 - \cos^2 y} dy = \int \frac{-1}{1 - z^2} dz$$

$$-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos y}{1 - \cos y} \right| = -\cos x + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$k \in \mathbb{R}$$

$$z = \cos y \\ dz = -\sin y dy$$

$$\ln \left| \frac{1 + \cos y}{1 - \cos y} \right| = 2\cos x + k$$

$$\left| \frac{1 + \cos y}{1 - \cos y} \right| = e^k e^{2\cos x}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos y}{1 - \cos y} \right|$$

$$\cos y \neq 1 \rightarrow y \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1 + \cos y}{1 - \cos y} = k e^{2\cos x}$$

$$k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$1 + \cos y = k e^{2\cos x} - \cos y \quad k e^{2\cos x}$$

$$\cos y (1 + k e^{2\cos x}) = k e^{2\cos x} - 1$$

$$\cos y = \frac{k e^{2\cos x} - 1}{k e^{2\cos x} + 1}$$

$$k e^{2\cos x} + 1 \neq 0$$

$$y = \arccos \underbrace{\frac{k e^{2\cos x} - 1}{k e^{2\cos x} + 1}}$$

$$-1 \leq \quad \leq 1$$

by převod:

$$-1 \leq \frac{t-1}{t+1} \leq 1$$

$$\bullet t+1 > 0 \quad t-1 \leq t-1 \leq t+1$$

body pro $k > 0$ ok

$$0 \leq 2t$$

$$\bullet t+1 < 0 \quad -t-1 \geq t-1 \geq t+1 \quad \text{nelze}$$

tedy $y = \arccos \frac{k e^{2\cos x} - 1}{k e^{2\cos x} + 1}$ $k > 0$

nebo $y = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

Podmínka: $y(0) = \frac{\pi}{2}$ $y = 2\pi$ nelze

$$\arccos \frac{k e^2 - 1}{k e^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{k e^2 - 1}{k e^2 + 1} = 0$$

$$k = \frac{1}{e^2}$$

Závěr: $y(x) = \arccos \frac{\frac{1}{e^2} e^{2\cos x} - 1}{\frac{1}{e^2} e^{2\cos x} + 1}$ $x \in \mathbb{R}$

Chapter 3

Applications of first-order ODEs

Contents

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Radioactivity and Carbon dating | 25 |
| 3.2 | Population growth models | 28 |
| 3.3 | Newton's law of cooling | 32 |
| 3.4 | Mixing problems | 32 |
| 3.5 | First-order model of supply and demand | 35 |

(6)

3.1 Radioactivity and Carbon dating

There are three isotopes of Carbon: ^{12}C , ^{13}C and ^{14}C . Almost all Carbon is made up of the first two (^{12}C and ^{13}C) because ^{14}C is radioactive: it decays with a half-life of 5730 years to form ^{14}N . Although it decays quite quickly, it is constantly being produced in the upper atmosphere by the action of cosmic rays. The equilibrium level of ^{14}C is about 1 part per trillion (10^{12}).

When an organism dies, it ceases to absorb Carbon from the environment, so the amount of ^{14}C it contains will decrease as this decays radioactively. The time since the death of the organism can be estimated by measuring how much ^{14}C there is left.

Let $x(t)$ be the proportion of ^{14}C at time t . In a short interval δt , the concentration will decrease by an amount proportional to how much is left, and to the length of the time interval:

$$x(t + \delta t) = x(t) - kx(t)\delta t$$

where k is a positive constant. Rearranging:

$$\frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} = -kx$$

and taking the limit of small δt (see chapter 1):

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad \text{with } x(t_0) = x_0. \quad (3.1)$$

We can solve this separable first-order ODE:

$$\int \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{1}{x} dx = - \int k dt + C$$

$$\log |x| = -kt + C$$

$$|x| = e^C e^{-kt}$$

Use the fact that $x > 0$ and set $A = e^C$:

$$x = A e^{-kt}$$

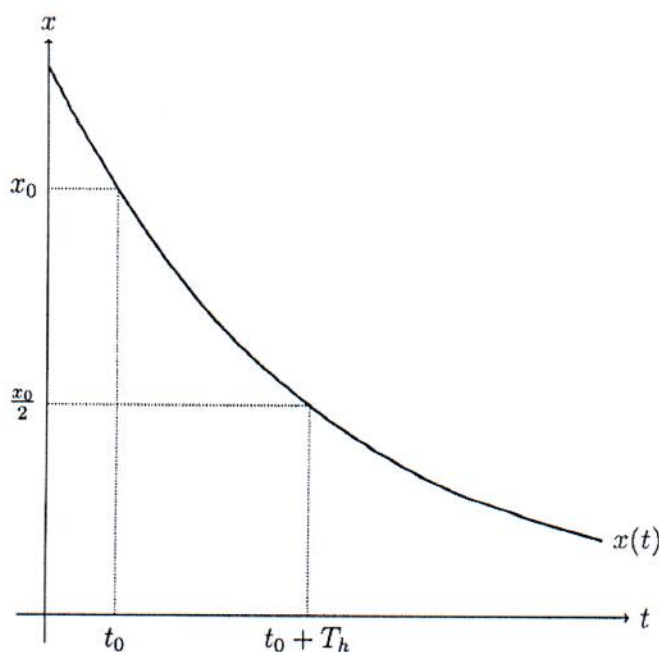
We can now use the initial condition $x(t_0) = x_0$ to find A :

$$x_0 = A e^{-kt_0}, \quad A = x_0 e^{kt_0}$$

which results in the solution for $x(t)$:

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}. \quad (3.2)$$

Graphically:



The **half-life** T_h is the time after which half of the ^{14}C has decayed. So, from (3.2), at time $t_0 + T_h$:

$$x(t_0 + T_h) = \frac{x_0}{2} = x_0 e^{-k(t_0 + T_h - t_0)} = x_0 e^{-kT_h},$$

or

$$T_h = \frac{1}{k} \log 2.$$

For ^{14}C , $T_h = 5730$ years, so $k = \frac{1}{T_h} \log 2 = 0.000121/\text{year}$.

Example: A fossilised bone is found to contain 0.1% of its original ^{14}C . Find the age of the fossil.

Solution: Let t be today's date, and suppose the fossil is T years old, so it was fossilised at time $t_0 = t - T$. At this time it had x_0 ^{14}C , and now it has $0.001x_0$.

$$x(t) = 0.001x_0 = x_0e^{-k(t-t_0)} = x_0e^{-kT},$$

which we can solve for T :

$$T = -\frac{1}{k} \log 0.001 = \frac{1}{k} \log 1000 = 57100 \text{ years.}$$

Example: A nuclear breeder reactor produces waste that contains (amongst other things) the isotope ^{239}Pu (Plutonium-239). After 15 years, the initial concentration of ^{239}Pu in the waste has decreased by 0.043%. Find the half-life of the isotope.

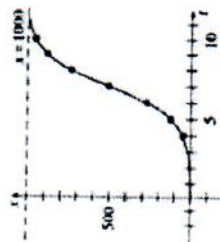
Solution:

Example: A sample of thread contains 10^{10} atoms of ^{14}C . How many disintegrations per second will there be?

Solution: $\frac{dx}{dt} = -kx$, so there are 0.000121×10^{10} disintegrations per year, or 0.04 disintegrations per second.

7

FIGURE 3.2.2 Logistic curves for different initial conditions



(a)

| t (days) | x (number infected) |
|------------|-----------------------|
| 4 | 50 (observed) |
| 5 | 124 |
| 6 | 276 |
| 7 | 507 |
| 8 | 735 |
| 9 | 882 |
| 10 | 953 |

(b)

FIGURE 3.2.3 Number of infected students in Example 1

number of individuals infected with the disease at time t .

EXAMPLE 1 Logistic Growth

Suppose a student carrying a flu virus returns to an isolated college campus of 1000 students. If it is assumed that the rate at which the virus spreads is proportional not only to the number x of infected students but also to the number of students not infected, determine the number of infected students after 6 days if it is further observed that after 4 days $x(4) = 50$.

SOLUTION Assuming that no one leaves the campus throughout the duration of the disease, we must solve the initial-value problem

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x), \quad x(0) = 1.$$

By making the identification $a = 1000k$ and $b = k$, we have immediately from (5) that

$$x(t) = \frac{1000k}{1 + 999ke^{-1000kt}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}$$

Now, using the information $x(4) = 50$, we determine k from

$$50 = \frac{1000}{1 + 999e^{-4000k}}$$

We find $-1000k = \frac{1}{4} \ln_{999} \frac{1}{949} = -0.9936$. Thus

$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.9936t}}$$

Finally, $x(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-5.9616}} = 276$ students.

Additional calculated values of $x(t)$ are given in the table in Figure 3.2.3(b). Note that the number of infected students $x(t)$ approaches 1000 as t increases. ▮