22. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je **spojitá** funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2 (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $-\infty < a < b \leq \infty$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou **spojité** a nechť g je **kladná** na $[a, b)$.

1. Jestliže $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak také $\int_a^b f$ konverguje.
2. Jestliže $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ konverguje.
3. Jestliže $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b g$ diverguje, pak také $\int_a^b f$ diverguje.

Věta 3 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f **spojitá** na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Algoritmus

1. Je funkce spojitá na omezeném intervalu? Lze ji spojitě dodefinovat?
2. Je možné integrál přímo upočítat? Je možné jej (např. substitucí) převést na tabulkový integrál?
3. Srovnávací a limitní srovnávací kritérium.

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^5 + 32}{(x^6 - 1)\sqrt[3]{x}}\, \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x + 4}{(x - \frac{5\pi}{2})\sqrt{x \sin x}}\, \mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{x + 2}{(x + 1)\ln(1 - \sqrt[3]{x})}\, \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x \ln|x|}{x(x - 1)}\, \mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\arcsin\,(\sin \pi x)\sqrt{|\ln(\frac{1}{2} + |x|)|}}\, \mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_0^{\tan\,1} \frac{\arctan\,(x + 1)}{\sqrt[3]{\arctan\,x} \cdot (1 - \arctan\,x)}\, \mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(1 + x)\sqrt[3]{x(x - 1)^2}}\, \mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{e^{|x|} - 1} \cdot e^x(x - 1)}\, \mathrm{d}x$

2. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   Zdroj:

   `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/index.html`

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan x^2}{x^\gamma} \sin(2x)\,\mathrm{d}x,\ \gamma > 0$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\arctan x)^\alpha \frac{\sin x}{2x+1}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\alpha} x \sin^\beta x\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\ln^\alpha(1+x)\sin^\beta x}{x^2(\pi-x)^3}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_0^1 (\arcsin x - x)^\alpha \frac{\sin^\beta(\pi x)}{(1-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$

   (f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \arctan^{\alpha}(\sqrt{x}) \sin^\beta\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

   (g) $\displaystyle\int_0^1 (\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x) \cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

3. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a,\infty)$, $a > 0$. Nechť existuje $\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot x^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^\infty f$ v závislosti na A a α?

4. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a,b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Nechť existuje $\lim_{x\to b-} f(x)\cdot(x-b)^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^b f$ v závislosti na A a α?