(1a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,dx$

probl. body: $0, \infty$ $\quad f \geq 0$

"0"

$\boxed{q \geq 0}$ $\quad 1$ je "silnější" než $x^q$

$g(x) = x^p$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{x^p} = \lim \frac{1}{1+x^q} = \begin{cases} 1 & q>0 \\ \frac{1}{2} & q=0 \end{cases}$$

$\int_0^2 f(x)$ k $\iff p > -1$

$\boxed{q < 0}$ $\quad x^q$ "silnější" než $1$

$g(x) = \frac{x^p}{x^q}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim \frac{x^q}{x^q+1} = \lim \frac{1}{1+x^{-q}}$$

$= 1$ $\qquad \int_0^2 f(x)$ k $\iff$ $\boxed{p-q > -1}$

"$\infty$"

$\boxed{q \geq 0}$ $\quad x^q$ vede nad $1$

$g(x) = \frac{x^p}{x^q}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim \frac{x^q}{1+x^q} = \begin{cases} 1 & q>0 \\ 1/2 & q=0 \end{cases}$$

KPMG

(1a) $\int_2^\infty f(x)$ k $\iff$ $pq - q < -1$

$\boxed{q < 0}$ 1 vede nad $x^q$

$g(x) = x^p$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{x^p} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^q} = 1$$

$\int_2^\infty f(x)$ k $\iff$ $p < -1$

$\boxed{\text{Závěr}}$

$\int_0^\infty f(x)$ k $\iff$ $q \geq 0$ & $p > -1$ & $p - q < -1$

nebo $q < 0$ & $p - q > -1$ & $p < -1$

neboli $q > p + 1$ & $p > -1$

nebo $q < p + 1$ & $p < -1$

(1b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(ax)}{x^p}\,dx \qquad a,p \in \mathbb{R}$

- $\boxed{a = 0}$ pak $f = 0 \Rightarrow \int f$ k
- $a \neq 0$

probl. bod: $0$ proč ne $\pi$? protože nedělíme $0$

$g(x) = x^{2-p}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1-\cos ax}{x^p}}{x^{2-p}} = \lim \frac{1-\cos ax}{a^2x^2}\cdot a^2 = \frac{a^2}{2} \in (0,\infty)$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx \text{ k} \Leftrightarrow \int_0^{\pi} \frac{dx}{x^{p-2}} \text{ k} \Leftrightarrow p-2 < 1 = \boxed{p < 3}$$

(1c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\, dx$

**Řešení:**

Integrand $f$ je nezáporná funkce, stačí tedy vyšetřovat absolutní konvergenci. K tomu použijeme limitní srovnávací kritérium a rozklad

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\, dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\, dx$$

Má-li totiž (absolutně) konvergovat integrál vlevo, pak také konvergují (absolutně) oba integrály vpravo (integrujeme přes menší množinu). Naopak, pokud (absolutně) konvergují integrály vpravo, pak také konverguje (absolutně) integrál vlevo (existencí integrálů je zaručena existence zobecněné primitivní funkce na celém intervalu i konečnost integrálu).[2]

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\, dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $(0, 1]$, a protože

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^b}} = \lim_{x\to 0+} \operatorname{arccotg}^a x = (\pi/2)^a$$

je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{1}{x^b}\, dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $b < 1$.

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\, dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $[1, +\infty)$, a protože

$$\lim_{x\to +\infty} x\operatorname{arccotg} x = 1,$$

platí také, že

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}}{\frac{1}{x^{a+b}}} = \lim_{x\to 0+} x^a \operatorname{arccotg}^a x = 1,$$

[2]) Tento krok v následujících příkladech již nebudeme komentovat

a tudíž je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b}}\,dx$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že tento integrál konverguje pro $a+b>1$ a diverguje jinak.

Závěr: Integrál konverguje (absolutně), pokud $1>b>1-a$. Jinak diverguje.

(p) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan\frac{x}{x^2+1}\ln^a x\,dx$

**Řešení:**

Integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Na pravém okolí jedničky je

$$\arctan\frac{x}{x^2+1}\approx\frac{1}{2},\qquad \ln x=\ln(1+(x-1))\approx(x-1)$$

(jak dostaneme použitím Taylorova rozvoje logaritmu v nule). Odtud plyne, že konvergence integrálu

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

je podle limitního srovnávacího kritéria ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_1^2 (x-1)^a\,dx$$

a použitím substituce $y=x-1$ dostaneme, že tento je ekvivalentní integrálu

$$\int_0^1 y^a\,dy$$

Poslední integrál konverguje, a to absolutně, pro $a>-1$.

Naopak na okolí nekonečna je

$$\arctan\frac{x}{x^2+1}\approx\frac{1}{x}$$

a podle limitního srovnávacího kritéria je konvergence integrálu

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$$

ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln^a x}{x}\,dx$$

1a $\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$

probl. body "0", "∞"

$0: \quad \sqrt{1+x^3} \approx 1$

$\sin x^2 \approx x^2$

$g(x) = x^2$

$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = 1 \in (0,\infty)$

$\int_0^2 f \; k \iff \int_0^2 x^2 \; k \quad \checkmark$

"∞"

$|\sin x^2| \leq 1$

$\int_2^\infty \frac{|\sin x^2|}{\sqrt{1+x^3}}\, dx \leq \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$

$g(x) = 1/x^{3/2}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = \lim \sqrt{\frac{x^3}{1+x^3}} = 1 \in (0,\infty)$

$\downarrow$

$\frac{1}{1+0}$

$\int_2^\infty f \; k \iff \int_2^\infty x^{-\frac{3}{2}} \; k$

$-\frac{3}{2} < -1 \quad \checkmark$

Závěr $\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}} \; k$

2b i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^a x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^a x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} tg^a x\,dx$

Integrand je spojitý na $(0,\frac{\pi}{2})$, potenciálně problematické jsou oba kraje.

v 0: $tg\,x = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 0}$ $\quad tg^a x = \underbrace{\frac{\sin^a x}{x^a}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^a x}}_{\to 1} \cdot x^a$

Srovnávat tedy budeme s $x^a$: $\lim_{x\to 0+} \frac{tg^a x}{x^a} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin^a x}{x^a} \cdot \frac{1}{\cos^a x} \overset{VoAL}{\underset{VoLSF}{=}} 1 \cdot 1 = 1$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^a x\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^a\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow a > -1$

v $\frac{\pi}{2}$: $tg\,x = \underbrace{\sin x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$ $\quad tg^a x = \underbrace{\sin^a x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^a}_{\to 1} \cdot \frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^a}$

Taylor v $\frac{\pi}{2}$ pro $\cos x$: $\cos x = -(x-\frac{\pi}{2}) + o((x-\frac{\pi}{2})^2) = (\frac{\pi}{2}-x)\cdot(1+o(\frac{\pi}{2}-x))$

Srovnávat tedy budeme s $\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^a}$: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{tg^a x}{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^a}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \sin^a x \cdot \left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^a \overset{VoAL}{\underset{VoLSF}{=}} 1$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} tg^a x$ KONV. $\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-x)^{-a}\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} y^{-a}\,dy$ KONV $\Leftrightarrow -a > -1 \Leftrightarrow a < 1$

subs. $y = \frac{\pi}{2}-x$

ZÁVĚR: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^a x\,dx$ KONV. pro $a \in (-1,1)$

DIV. pro $a \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

---

ÚLOHA 2

a) $\int_0^\infty x^{-\frac{3}{4}} e^{-\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} e^{-y}\,dy$ $\quad$ Integrand $y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}$ je spojitý na $(0,\infty)$.

subst. $\sqrt{x} = y$ $\quad x\in(0,\infty) \mapsto y\in(0,\infty)$ bijekce

$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dy$ $\quad \frac{1}{\sqrt{x}} \in (0,\infty)\ \forall x\in(0,\infty)$

v 0: $e^{-y} \xrightarrow[y\to 0+]{} 1 \Rightarrow$ srovnáme s $y^{-\frac{1}{2}}$: $\lim_{y\to 0+} \frac{y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}}{y^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{y\to 0+} e^{-y} = 1$

$\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}$ KONV. , tedy v 0 integrál konverguje

v $\infty$: $y^{-\frac{1}{2}}e^{-y} \le e^{-y} \quad \forall y \ge 1$

$0 \le \int_1^\infty y^{-\frac{1}{2}}e^{-y} \le \int_1^\infty e^{-y} = e^{-1} < \infty \Rightarrow$ KONV, tedy v $\infty$ integrál rovněž konverguje

ZÁVĚR: $\int_0^\infty x^{-\frac{3}{4}} e^{-\sqrt{x}}\,dx$ KONVERGUJE

e) $\int_0^1 x^{-\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{-\ln^2 x}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,1]$.

v 0: $\ln^2 x \xrightarrow[x\to 0+]{} +\infty \Rightarrow e^{-\ln^2 x} \xrightarrow[x\to 0+]{} 0$ ... integrand lze spojitě rozšířit na $[0,1]$, je tedy omezený $\Rightarrow$ KONV.

---

f) $\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{x}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\infty) \Rightarrow$ nutno vyšetřit oba krajní body

v 0: $\mathrm{arctg}\,x = x + o(x) = x\cdot(1+o(1))$ .. Maclaurin 1. stupně

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{x}}{\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot x}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x} = 1$$

$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{x}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 \sin\frac{1}{x}$ KONV. $\qquad \int_0^1 \sin\frac{1}{x}$ KONV.

$|\sin\frac{1}{x}| \le 1 \Rightarrow \int_0^1 |\sin\frac{1}{x}|dx \le \int_0^1 1\,dx = 1 \Rightarrow$ ABS. KONV.

v $\infty$: $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0_+$, $\frac{\sin y}{y} \xrightarrow[y\to 0+]{} 1$, $\mathrm{arctg}\,x \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot\mathrm{arctg}\,x}{x}}{\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{\pi}{2}}{x}} \overset{\text{VoAL}}{\underset{\text{VoLSF}}{=}} 1 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{x} \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{\frac{1}{x}\frac{\pi}{2}}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{c}{x^2}\,dx \text{ KONV.}$$

Zadaný integrál tedy konverguje

---

2c g) $\int_0^\pi \ln\sin x\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\pi)$, v krajních bodech utíká do $-\infty$.

v 0: $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0+]{} 1$ ... zkusíme srovnat $\ln(\sin x)$ s $\ln x$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln\sin x}{\ln x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim \cos x\cdot\frac{x}{\sin x} \overset{\text{VoAL}}{=} 1$$

$\int_0^1 \ln\sin x\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 \ln x\,dx$ KONV. $\qquad \int_0^1 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_0^1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ KONV.

v $\pi$: $\frac{\sin x}{\pi - x} \xrightarrow[x\to\pi-]{} 1$ ... plyne z Taylorova rozvoje sinu v bodě $\pi$.

$$\lim_{x\to\pi-} \frac{\ln\sin x}{\ln(\pi-x)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\pi-} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{\pi-x}} = \lim_{x\to\pi-} (-\cos x)\cdot\frac{\pi-x}{\sin x} \overset{\text{VoAL}}{=} 1$$

$\int_1^\pi \ln\sin x\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_1^\pi \ln(\pi-x)\,dx$ KONV $\underset{\text{subst. } y=\pi-x}{\Leftrightarrow} \int_0^{\pi-1} \ln y\,dy$ KONV.

ZÁVĚR: $\int_0^\pi \ln\sin x\,dx$ KONVERGUJE

2d)

$$\int_1^\infty \sin x^\alpha \, dx$$

- $\alpha = 0$ $\quad \int_1^\infty \sin 1 \, dx = \infty \quad$ D

- $\alpha < 0$ $\quad$ u 1 je fce spoj

  u $\infty$: $\quad \sin x^\alpha$ srovnáme s $x^\alpha$

  $$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x^\alpha}{x^\alpha} = 1$$

  $x^\alpha \to 0$ $\quad$ VOLSF (D)

  $$\int_1^\infty \sin x^\alpha \text{ Ak} \Leftrightarrow \int_1^\infty x^\alpha \, dx \text{ Ak} \Leftrightarrow \boxed{\alpha < -1}$$

- $\alpha > 0$ $\quad$ substituce $\quad x^\alpha = t$

  $\qquad x = t^{1/\alpha}$

  $$\int_1^\infty \frac{1}{\alpha} t^{1/\alpha - 1} \sin t \, dt \quad \underline{\underline{\text{Ak}}} \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) > 1$$

  $$= \int_1^\infty \frac{1}{\alpha} \frac{\sin t}{t^{1 - 1/\alpha}} \, dt \qquad 0 > \frac{1}{\alpha}$$

  $\boxed{0 > \alpha}$ ale $\boxed{\alpha > 0}$

Tedy $\int$ $\underline{\text{Absolutně}}$ konverguje pro $\quad \alpha < -1$

což jsme vlastně chtěli ukázat.

Jelikož nyní $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{2x}\, dx = +\infty$ , je $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\, dx = +\infty$ .

Jak je to s integrálem $\int_{1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ , je-li $x_0 > 1$ ?

b/ použijete-li cvičení 3,27 /což vlastně není nic jiného, než rychle provedená část a/ /, je vzhledem k

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \cdot x = 1 , \quad \alpha = 1$$

dokázáno, že $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$ .

Celý postup si dobře rozmyslete a jednotlivé kroky podrobně odůvodněte!

3,31. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\, dx$ konverguje !

Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův !

Při vyšetřování konvergence integrálů, je třeba velmi dobře znát chování jednotlivých funkcí - zvláště v okolí "nepříjemných" bodů. Zopakujte si proto, jak vypadají například následující limity:

$$\lim_{x\to 0_+} x^n \cdot \log^k x , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{\log x} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} ,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} , \ldots$$

(2e) 3,32. Dokažte, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ !

1/ Funkce $e^{-x^2}$ je spojitá a kladná v intervalu $(0,+\infty)$ , tedy $e^{-x^2} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$ .

2/ Zřejmě $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,9)}$ /proč?/; protože $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$ , je podle cvičení 3,25 i $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(9,+\infty)}$ . Tudíž $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ .

3/ Lze také postupovat takto /což není nic jiného, než důkaz vět ze cvičení 3,25 /:

existuje takové $x_0$ , že $0 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2}$ pro $x > x_0$ .

Proč?

Naše nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$0 \le e^{-x^2} \cdot x^2 \le 1 \qquad \text{pro } x > x_0 ,$$

která vyplývá ze vztahu $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$ a z definice limity.

Protože $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ je konečný pro $x_0 > 0$ , je konečný i integrál $\int_{x_0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ . Lehko ukážeme, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,x_0)}$ .

4/ Ještě jiný důkaz:

pro každé $x \in E_1$ jest $-x^2 \leq -2x + 1$ /proč ?/,

tedy též $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ /odůvodněte ! / .

Zřejmě $(L) \int_0^\infty e^{-2x+1}\,dx$ existuje /tj. je $e^{-2x+1} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$/

a $(N) \int_0^\infty e^{-2x+1}\,dx = \frac{e}{2}$ . Odtud již lehko učiníme závěr,

že $0 \leq \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \frac{e}{2}$ /s pomocí jakých vět ? / .

**3,33.** Dokažte, že $\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$ !

1/ Opět ukažte, že $\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}^{R}_{(1,2)}$ .

2/ Protože

$$\lim_{x \to 1+} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}} \text{, tedy } \alpha = \tfrac{1}{2} < 1 \text{,}$$

je podle 3,25 $\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$ .

3/ Ukažte, že existuje taková konstanta $k > 0$ , že

$$x \in (1,2) \Rightarrow 0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{k}{\sqrt{x-1}} .$$

Toto dokažte např. takto:

$$0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

a funkce $\dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ je spojitá v intervalu $\langle 1,2 \rangle$ , tedy

i omezená v $\langle 1,2 \rangle$ .

Ze vztahu $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$ pak plyne tvrzení .

**3,34.** Dokažte, že $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}\,dx = +\infty$ !

1/ Opět $\dfrac{1}{1-x^3} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$ .

2/ Protože $\displaystyle\lim_{x \to 1-} \frac{1}{1-x^3}(1-x) = \frac{1}{3}$ , $\alpha = 1$ ,

plyne podle 3,25 tvrzení.

3/ Ukažte, že existuje taková kladná konstanta $K$ , že

$$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{1-x^3} \geq \frac{K}{1-x}$$

$\dfrac{1}{1-x^3} = \dfrac{1}{1-x} \cdot \dfrac{1}{1+x+x^2}$ a funkce $\dfrac{1}{1+x+x^2}$

# 4. Konvergence určitého integrálu

Budeme se zabývat následující úlohou. Nechť funkce $f$ je spojitá na otevřeném intervalu $(a, b)$ (omezeném či neomezeném). Existuje integrál $\int_a^b f$ (zobecněný Riemannův či Newtonův – kteréžto dva pojmy pro takové funkce splývají)? V případě, že $\int_a^b f$ existuje (tj. je roven nějakému reálnému číslu), řekneme, že integrál konverguje. V opačném případě řekneme, že diverguje. Pokud konverguje integrál $\int_a^b |f|$, řekneme, že $\int_a^b f$ konverguje absolutně. Pokud integrál konverguje, ale nikoli absolutně, říkáme, že konverguje neabsolutně. Budeme se držet této terminologie spíše než pojmů „existuje" a „neexistuje", protože tyto pojmy mají u jiných integrálů (např. Lebesgueova) jiný význam. Porovnejte pojmy divergence, konvergence a absolutní konvergence s analogickými pojmy pro řady.

**§20.** První metodou je použití věty, která říká, že *je-li $f$ funkce* **spojitá na uzavřeném intervalu** $[a, b]$, *pak $\int_a^b f$ konverguje* (viz např. §10).

Příklad Integrál $\int_7^{50} \operatorname{arctg}(x^5 + 16) \cdot \sin x \, dx$ konverguje, protože integrovaná funkce je spojitá na intervalu $[7, 50]$.

Příklad Integrál $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, dx$ konverguje, protože funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0, 1], \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

je spojitá na $[0, 1]$. Zde využíváme toho, že integrál z funkce $f$ od $a$ do $b$ závisí jen na hodnotách $f$ na $(a, b)$ a ne na tom, zda a případně jak je $f$ definována v krajních bodech. Můžeme-li ji tam však dodefinovat spojitě, pak lze použít výše uvedenou větu.

**§21.** Další možností je **výpočet určitého integrálu** s využitím primitivní funkce dle §11. Z výpočtů v §11 plyne tvrzení v následujícím příkladu.

Příklad Integrál $\int_0^1 x^\alpha \, dx$ konverguje, právě když $\alpha > -1$.

Výpočet druhého příkladu je zcela analogický, a tak ho necháváme na čtenáři.

Příklad Integrál $\int_1^{+\infty} x^\alpha \, dx$ konverguje, právě když $\alpha < -1$.

Uvedené dva příklady jsou užitečné pro vyšetřování konvergence mnoha jiných integrálů, jak uvidíme později.

(22) Příklad Integrál $\int_0^1 \log x \, dx$ konverguje, protože

$$\int_0^1 \log x \, dx = [x \log x]_0^1 - \int_0^1 1 \, dx = -1.$$

(2g) $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{\frac{\sin x^p}{x^q}}_{f} dx$

- $f(x)$ spoj na $(0,1]$
- problém v $0$

∘ pro $q<1$ ze SK $\quad \left|\frac{\sin x^p}{x^q}\right| \le \frac{1}{x^q}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^q} \text{ K} \Rightarrow \int_0^1 f \text{ K pro } \forall p$$

∘ pro $q \ge 1$

- $p>0$ $\quad$ LSK s $g(x) = \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\sin x^p|}{x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = 1 \in (0,\infty) \quad \Rightarrow \text{konv. pro } p-q > -1$$

- $p=0$ $\quad f(x) = \frac{\sin 1}{x^q}$ K pro $q<1$ (ale my jsme v $q \ge 1$)

- $p<0$ $\quad$ Substituce $y = x^p$ $\quad dy = p x^{p-1} dx$

$$\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q} dx = \int_\infty^1 \frac{\sin y}{y^{q/p}} \frac{1}{p} y^{1/p - 1} dy =$$

$$= -\frac{1}{p}\int_1^\infty \sin y \cdot y^{\frac{1}{p} - 1 - q/p} \qquad \text{AK} \iff 1 + \frac{q}{p} - \frac{1}{p} > 1$$

$$\iff \frac{q-1}{p} > 0$$

ZÁVĚR $\quad$ AK pro $(q<1,\ p\in\mathbb{R}) \vee (q\ge 1,\ p>0,\ p-q>-1) \vee \underbrace{\left(p<0, q\ge 1, \frac{q-1}{p}>0\right)}_{\emptyset}$

LOŽE $\quad (q<1,\ p\in\mathbb{R}) \vee (q\ge 1,\ p>q-1)$

2h

Př:

$$\int_0^\infty \frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}\,dx \qquad \alpha, k \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}$$ nezáporná, spojitá na $(0,1)$ a $(1,\infty)$

v bodě 1: co když $\alpha < 0$ ? pak ~~...~~ problém

Singularita: $0, 1, \infty$

"0": $k \geq 0$ $\quad x^k \leq 1$ $\quad$ 1 vede nad $x^k$

$k < 0$ $\quad x^k > 1$ $\quad$ $x^k$ vede nad 1

! bývá výhodné vytknout vedoucí člen

$$\frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k} = \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k(1+x^{-k})}$$

• $k \geq 0$ $\quad g(x) = |\ln x|^\alpha$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{1}{1+x^k} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases} \in (0,\infty)$$

$$\int_0^{1/e} f(x)\,dx \text{ k} \iff \int_0^{1/e} |\ln x|^\alpha\,dx \text{ k} \iff \alpha \in \mathbb{R}$$
(srovnání $x^0$)

• $k < 0$ $\quad g(x) = \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{x^k}{1+x^k} = \lim \frac{1}{1+x^{-k}} = 1 \in (0,1)$$

$$\int_0^{1/e} f(x)\,dx \text{ k} \iff \int_0^{1/e} \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k} \;\; k<0 \text{ k} \iff \alpha \in \mathbb{R}$$

celkem: u 0 konv. $\forall k, \alpha \in \mathbb{R}$

(2a) "1"

jmenovatel je kamarád :) $\quad 1+x^k \to 2 \quad \forall k$

$|\ln x|^\alpha \approx |1-x|^\alpha$ neb $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$g(x) = (1-x)^\alpha$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{1}{1+x^k} = \frac{1}{2} \in (0,\infty)$

P: nutno vyšetřit z obou stran

- $\int\limits_{1/e}^{1} f(x)$ K $\Leftrightarrow \int\limits_{1/e}^{1} g(x)\,dx$ K $\Leftrightarrow \int\limits_{1/e}^{1} (1-x)^\alpha$ K $\Leftrightarrow \alpha > -1$

- $\int\limits_{1}^{e} f(x)\,dx$ K $\Leftrightarrow$ $\qquad \alpha > -1$

"$\infty$"

- $k \geq 0$ $\qquad 1+x^k \approx x^k \qquad 1+x^k = x^k(1+x^{-k})$

$g(x) := \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{x^k}{1+x^k} = \begin{cases} 1 & k \neq 0 \\ 1/2 & k = 0 \end{cases} \in \mathbb{R}$

$\int\limits_{e}^{\infty} f(x)\,dx$ K $\Leftrightarrow \int\limits_{e}^{\infty} \frac{|\ln x|^\alpha}{x^k}\,dx \Leftrightarrow$ buď $k > 1 \quad \alpha \in \mathbb{R}$ nebo $k = 1 \quad \alpha < -1$

- $k < 0$ $\qquad g(x) := |\ln x|^\alpha \qquad 1+x^k \approx 1$

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\int\limits_{e}^{\infty} f(x)\,dx$ K $\Leftrightarrow \int\limits_{e}^{\infty} |\ln x|^\alpha$ K $\Leftrightarrow$ NIKDY

Závěr $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ K $\Leftrightarrow$ $\underline{k > 1 \ \& \ \alpha > -1}$

(2i) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$

$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\to$ funkci lze tedy spojitě rozšířit do 0

$\to$ spojitá na kompaktu $\to$ Ak

4/ Ještě jiný důkaz:

pro každé $x \in E_1$ jest $-x^2 \leq -2x+1$ /proč ?/,

tedy též $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ /odůvodněte ! / .

Zřejmě $(L)\int_0^{\infty} e^{-2x+1}\,dx$ existuje /tj. je $e^{-2x+1} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$/

a $(N)\int_0^{\infty} e^{-2x+1}\,dx = \frac{e}{2}$ . Odtud již lehko učiníme závěr,

že $0 \leq \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \frac{e}{2}$ /s pomocí jakých vět ? / .‖

(2j) **3,33. Dokažte, že** $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$ **!**

1/ Opět ukažte, že $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}^{R}_{(1,2)}$ .

2/ Protože

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}}\text{ , tedy } \alpha = \frac{1}{2} < 1 \text{ ,}$$

je podle 3,25 $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$ .

3/ Ukažte, že existuje taková konstanta $k > 0$ , že

$$x \in (1,2) \Rightarrow 0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{k}{\sqrt{x-1}} \text{ .}$$

Toto dokažte např. takto:

$$0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

a funkce $\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ je spojitá v intervalu $\langle 1,2 \rangle$ , tedy

i omezená v $\langle 1,2 \rangle$ .

Ze vztahu $\frac{1}{\sqrt{x-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$ pak plyne tvrzení .‖

**3,34. Dokažte, že** $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}\,dx = +\infty$ **!**

1/ Opět $\frac{1}{1-x^3} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$ .

2/ Protože $\lim\limits_{x\to 1_-} \frac{1}{1-x^3}(1-x) = \frac{1}{3}$ , $\alpha = 1$ ,

plyne podle 3,25 tvrzení.

3/ Ukažte, že existuje taková kladná konstanta $K$ , že

$$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{1-x^3} \geq \frac{K}{1-x}$$

$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x+x^2}$ a funkce $\frac{1}{1+x+x^2}$

*Řešení.* Platí totiž $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$ a integrál $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ pro $\alpha > 1$ konverguje (viz §21). Proto podle srovnávacího kritéria $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \mathrm{d}x$ konverguje. Tedy i původní integrál konverguje (dokonce absolutně). ■

Příklad Integrál $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \,\mathrm{d}x$ diverguje.

*Řešení.* Pro $x \in (1, \infty)$ je totiž $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \geq \frac{\operatorname{arctg} 1}{x} = \frac{\pi}{4x} \geq 0$ a integrál $\int_1^\infty \frac{\pi}{4x}\,\mathrm{d}x$ diverguje. ■

**§25.** Užitečnou variantou srovnávacího kritéria je **limitní srovnávací kritérium.**

*Nechť funkce $f$ a $g$ jsou spojité na intervalu $[a, b)$ (kde $-\infty < a < b \leq +\infty$), funkce $g$ nechť je kladná na $[a, b)$.*

*(i) Pokud limita $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak $\int_a^b f$ také konverguje (dokonce absolutně).*

*(ii) Pokud limita $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b g$.*

*Analogická tvrzení platí pro interval typu $(a, b]$.*

Příklad Zjistěte, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \,\mathrm{d}x$.

*Řešení.* Funkce $f(x) = \sin^\alpha x$ a $g(x) = x^\alpha$ jsou spojité a kladné na $(a, b] = (0, \pi/2]$ a platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^\alpha x}{x^\alpha} = 1,$$

tedy integrál ze zadání konverguje, právě když konverguje $\int_0^{\pi/2} x^\alpha \,\mathrm{d}x$. Ten ovšem konverguje právě pro $\alpha > -1$. To můžeme ověřit přímým výpočtem. Plyne to též z prvního příkladu v §21 s použitím faktu, že $\int_1^{\pi/2} x^\alpha \,\mathrm{d}x$ konverguje dle §20.

Závěr je, že integrál konverguje právě pro $\alpha > -1$. ■

Příklad Zjistěte, zda konverguje $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

*Řešení.* Integrand je spojitý na $(0, \pi]$ a platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}} = \sqrt{2}.$$

Tedy vyšetřovaný integrál konverguje, právě když konverguje $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Ten ovšem
(2t) diverguje, tudíž diverguje i původní integrál. ■

Příklad Pro které hodnoty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_0^{+\infty} x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x \,\mathrm{d}x$?

(22) *Řešení.* Integrand je spojitý na $(0, +\infty)$. Využijeme toho, že integrál $\int_0^\infty$ konverguje, právě když konvergují oba integrály $\int_0^1$ a $\int_1^\infty$.

Na intervalu $(0, 1]$ je integrand spojitý a platí $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x}{x^{\alpha+\beta}} = 1$, a tedy $\int_0^1 x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x \,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^1 x^{\alpha+\beta} \,\mathrm{d}x$, což je právě když $\alpha + \beta > -1$.

I na intervalu $[1, \infty)$ je integrand spojitý a platí $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x}{x^\alpha} = (\pi/2)^\beta$, tudíž $\int_1^\infty x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x \,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x$, což je právě když $\alpha < -1$.

Závěr je, že integrál ze zadání konverguje, právě když $\alpha < -1 < \alpha + \beta$. ■

**§26.** Dále můžeme použít některé věty používané při výpočtu určitého integrálu, konkrétně **metodu per partes** z §12 a **věty o substituci** podle §13 a zvláště §14.

<u>P ř í k l a d</u> Integrál $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $\alpha > 0$.

*Řešení.* Již víme z §24, že pro $\alpha > 1$ tento integrál konverguje absolutně. Z §23 dále víme, že pro $\alpha \leq 0$ integrál diverguje. Pro $\alpha \in (0, 1]$ (nebo rovnou pro všechna $\alpha > 0$) můžeme použít metodu per partes. Tedy

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x^\alpha}\right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\alpha \cos x}{x^{\alpha+1}} \,\mathrm{d}x,$$

jsou-li aspoň dva ze tří uvedených výrazů reálným číslem. Přitom zobecněný přírůstek na pravé straně je reálným číslem pro každé $\alpha > 0$ a integrál na pravé straně pro $\alpha > 0$ konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria. Tedy i integrál na levé straně konverguje. ■

<u>P ř í k l a d</u> Pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_1^\infty \sin(x^\alpha) \,\mathrm{d}x$ ?

*Řešení.* Pokud $\alpha < 0$, pak $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x^\alpha}{x^\alpha} = 1$, a tedy integrál konverguje, právě když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x$. To je právě pro $\alpha < -1$.

Pro $\alpha = 0$ integrál diverguje, protože je to integrál z nenulové konstantní funkce $\sin 1$ na neomezeném intervalu.

Zbývá vyšetřit případ $\alpha > 0$. Použijme druhou substituční metodu z §14 pro funkci $\varphi(t) = t^{1/\alpha}$. Pak

$$\int_1^\infty \sin(x^\alpha) \,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} \sin t \,\mathrm{d}t,$$

pokud aspoň jeden z integrálů konverguje. Přitom integrál na pravé straně podle předchozího příkladu konverguje, právě když $\frac{1}{\alpha} - 1 < 0$, tj. $\alpha > 1$.

# ÚLOHA 1

a) $\int_0^1 x^a\,dx = \begin{cases} a=-1: & [\ln x]_0^1 = 0-(-\infty) = \infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ a\neq -1: & \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \begin{cases} a>-1: & \frac{1}{a+1} - \frac{0}{a+1} = \frac{1}{a+1} \Rightarrow \text{KONV.} \\ a<-1: & \frac{1}{a+1} - \frac{\infty}{a+1} = +\infty \Rightarrow \text{DIV.}\end{cases}\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\int_0^{\alpha\in\mathbb{R}^+} x^a\,dx$ KONV. pro $a>-1$, DIV. pro $a\leq -1$

---

b) $\int_1^\infty x^a\,dx = \begin{cases} a=-1: & [\ln x]_1^\infty = +\infty - 0 = +\infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ & \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_1^\infty = \begin{cases} a>-1: & \frac{\infty}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ a<-1: & \frac{0}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{|a+1|} \Rightarrow \text{KONV.}\end{cases}\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\int_{\alpha}^\infty x^a\,dx$, $\alpha>0$: KONV. pro $a<-1$, DIV. pro $a\geq -1$

---

c) $\int_0^\infty x^a + x^b\,dx = ⊛$

(2m

$\int_0^\infty x^a\,dx = \underbrace{\int_0^1 x^a\,dx}_{=:I_1} + \underbrace{\int_1^\infty x^a\,dx}_{=:I_2}$

$I_1 < \infty \iff a>-1$

$I_2 < \infty \iff a<-1$

$\Rightarrow I_1 + I_2 = +\infty \quad \forall a\in\mathbb{R}$

$⊛ = \int_0^\infty x^a\,dx + \int_0^\infty x^b\,dx = \underset{\forall a\in\mathbb{R}}{(+\infty)} + \underset{\forall b\in\mathbb{R}}{(+\infty)} = +\infty$

---

d) $\int_0^{e^{-1}} \frac{|\ln x|^a}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} |y|^a\,dy = \int_1^\infty y^a\,dy = \begin{cases} a<-1: & \frac{1}{|a+1|} \Rightarrow \text{KONV.} \\ a\geq -1: & +\infty \Rightarrow \text{DIV.}\end{cases}$

subst. $y = \ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$

$x\in(0,e^{-1}) \mapsto y\in(-\infty,-1)$

$\frac{1}{x}\in(0,\infty)\ \forall x\in(0,e^{-1})$

---

e) $\int_1^e \frac{\ln^a x}{x}\,dx = \int_0^1 y^a\,dy = \begin{cases} a\leq -1: & +\infty \Rightarrow \text{DIV} \\ a>-1: & \frac{1}{a+1} \Rightarrow \text{KONV.}\end{cases}$

$y = \ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$

$x\in(1,e)\mapsto y\in(0,1)$

$\frac{1}{x}\in(0,\infty)\ \forall x\in(1,e)$

---

f) $\int_e^\infty \frac{\ln^a x}{x}\,dx = \int_1^\infty y^a\,dy = \begin{cases} a<-1: & \frac{1}{|a+1|} \Rightarrow \text{KONV.} \\ a\geq -1: & +\infty \Rightarrow \text{DIV}\end{cases}$

$y = \ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$

$x\in(e,\infty)\mapsto y\in(1,\infty)$

$\frac{1}{x}\in(0,\infty)\ \forall x\in(1,e)$

---

g) $\int_0^{e^{-1}} x^a |\ln x|^b\,dx$

- nechť $\varepsilon>0$, pak $\lim_{x\to 0} x^\varepsilon\cdot|\ln x|^b = 0 \quad \forall b\in\mathbb{R}$

$\lim_{x\to 0} x^{-\varepsilon}\cdot|\ln x|^b = +\infty \quad \forall b\in\mathbb{R}$

Integrand $x^a|\ln x|^b$ je spojitý na $(0,e^{-1}]$, problematický bodem je pouze 0

b) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\,dx$ ... integrand je spojitý na $(0,1]$ ... problematický bod je jen 0

$\operatorname{tg} x = x + o(x^2) = x\cdot(1+o(x))$ ... Maclaurin 2. stupně

$\Downarrow$ srovnání $\operatorname{tg} x \sim x$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{\frac{x}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\,dx \ K \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx \ K \qquad \int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 < \infty \Rightarrow KONV.$$

---

Ú3 c) $\int_0^\infty \frac{x \sin x}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{x+1}{x+1}\sin x - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1} = \int_0^\infty \sin x\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}\,dx$

integrand je spojitý na $[0,\infty)$ ... problematické je jen $\infty$

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}\,dx$ konverguje dle Dirichleta: $\frac{1}{x+1} \searrow 0$ pro $x\to\infty$

$$\left|\int_0^M \sin x\right| = |\cos 0 - \cos M| \le 2 \quad \forall M\in(0,\infty)$$

$$\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{x\to\infty} \cos x - \lim_{x\to 0+}\cos x \ \ NEEX. \Rightarrow \int_0^\infty \frac{x\sin x}{x+1}\,dx \ \ DIVERGUJE$$

---

Ú2 c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(-1,1)$, problematické jsou oba kraje

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} \Rightarrow \text{srovnání s } \frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ v } 1$$

a s $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ v $-1$

v 1: $\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} \overset{VoAL}{\underset{VoLSF}{=}} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}\,dy$ KONV.

subst. $y = 1-x$

v $-1$: $\lim_{x\to -1+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} \overset{VoAL}{\underset{VoLSF}{=}} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}\,dz$ KONV.

subst. $z = 1+x$

Tedy $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONVERGUJE

---

2n d) $\int_0^1 x^{\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{\ln^2 x}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(0,1]$, problém je v 0.

Pro $0<x<e^{-1}$ je $\ln x < -1$, tedy $x^{\ln x} > x^{-1}$ pro $0<x<e^{-1}(<1)$

$$\int_0^1 x^{\ln x}\,dx = \int_0^{e^{-1}} x^{\ln x}\,dx + \underbrace{\int_{e^{-1}}^1 x^{\ln x}\,dx}_{\in\mathbb{R}} > \int_0^{e^{-1}} x^{-1}\,dx + c = +\infty \Rightarrow DIV.$$

h) $\int_0^{\pi} \frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $\sec(x) = \frac{1}{\cos x}$ ... integrand je spojitý na $(0,\frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2},\pi]$.

$$\left|\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{N}(0,\pi) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}\right| \in \mathcal{N}(0,\pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}} \in \mathcal{N}(0,\pi).$$

---

i) $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \ln^2(1+x)}$ ... integrand spojitý na $(0,\frac{1}{2}]$, problém v 0.

• $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\qquad$ • $\lim_{y\to 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3} \overset{VoLSF}{=} 1$

Srovnáme tedy $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot \ln^2(1+x)}}{\frac{(x^2+x^3)}{x\cdot x^2}} = \lim \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3} \cdot \frac{x^2}{\ln^2(1+x)} = 1$

$\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot \ln^2(1+x)}\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow$ $\int_0^{1/2} \frac{x^2+x^3}{x\cdot x^2}\,dx$ KONV.

$\int_0^{1/2} \frac{x^2+x^3}{x^3}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x} + 1\,dx = +\infty$, tedy DIV. $\Rightarrow$ $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot \ln^2(1+x)}$ DIV.

---

(10) j) $\int_1^2 \frac{\arctan(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}$ ... integrand spojitý na $(1,2]$, problém v 1.

• $\lim_{y\to 0} \frac{\arctan y}{y} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x-1)}{x-1} = 1$

Srovnání: $\lim_{x\to 1+} \dfrac{\frac{\arctan(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}}{\frac{(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}} = \lim_{x\to 1+} \frac{\arctan(x-1)}{x-1} = 1$

Stačí tedy zjistit $\int_1^2 \frac{x-1}{(x-\sqrt{x})^p}\,dx = \int_1^2 \frac{x-1}{(\sqrt{x})^p\cdot(\sqrt{x}-1)^p} = \int_1^2 \frac{(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p\,(\sqrt{x}-1)^p}\,dx$

Srovnání: $\lim_{x\to 1+} \dfrac{\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p(\sqrt{x}-1)^p}}{(\sqrt{x}-1)^{1-p}} \overset{VoAL}{\underset{VoLSF}{=}} 2 \Rightarrow$ stačí zjistit $\int_1^2 (\sqrt{x}-1)^{1-p}\,dx$

Taylor v 1 z $\sqrt{x}$: $\quad \sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + o(x-1)$ $\quad \Rightarrow$ srovnání $\lim_{x\to 1+} \frac{(\sqrt{x}-1)^{1-p}}{(\frac{1}{2}(x-1))^{1-p}} = 1$

$\Rightarrow$ stačí zjistit $\int_1^2 (x-1)^{1-p}\,dx = \int_0^1 y^{1-p}\,dy \Rightarrow$ $1-p > -1 \Leftrightarrow p < 2 \Rightarrow$ KONV.

subst. $y = x-1$, $dy = dx$ $\quad x\in(1,2) \mapsto y \in (0,1)$ $\quad \Rightarrow 1-p \le -1 \Leftrightarrow p \ge 2 \Rightarrow$ DIV.

• $\lim_{x\to\pi-}\left(\frac{\sin x}{\pi-x}\right)^{p} \overset{VLSF}{=} 1$ • $\lim_{x\to\pi-}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x\right) = e^{\frac{-\pi^2}{2}}+1$

v π: srovnání s $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)^{p}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} z^{p}\,dx$, $z=\pi-x$ — $p>-1 \Rightarrow$ KONV.; $p\le -1 \Rightarrow$ DIV.

ZÁVĚR: $p>3 \Rightarrow$ KONV.

$p\le 3 \Rightarrow$ DIV.

---

n) $\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^p}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\infty)$, problém v 0 a v $\infty$

v 0: $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o_{x\to0}(x^3) \Rightarrow \lim_{x\to0+}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$

srovnání: $\lim_{x\to0+}\frac{\frac{x-\sin x}{x^p}}{\frac{x^3}{x^p}}=\frac{1}{6} \Rightarrow$ stačí vyšetřit $\int_0^1\frac{x^3}{x^p}\,dx$ — $3-p>-1 \Rightarrow$ KONV.; $3-p\le -1 \Rightarrow$ DIV.

v $\infty$: $\frac{x-1}{x^p}\le\frac{x-\sin x}{x^p}\le\frac{x+1}{x^p} \Rightarrow$ konvergence je ekvivalentní konvergenci

integrálu $\int_1^\infty\frac{x+\alpha}{x^p}=\int_1^\infty \underbrace{x^{1-p}+\alpha x^{-p}}_{=x^{1-p}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to\infty]{}1}}\,dx$ — $1-p<-1 \Rightarrow$ KONV.; $1-p\ge -1 \Rightarrow$ DIV.

ZÁVĚR: $\int_0^\infty\frac{x-\sin x}{x^p}\,dx$ KONV. pro $2<p<4$

DIV. pro $p\in(-\infty,2]\cup[4,\infty)$

---

(4p) n) $\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg} px}{x^n}\,dx$

• $p=0 \Rightarrow$ integrand je konstantní $0 \Rightarrow$ KONV.

• $p>0$: $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg} px}{px}=1 \Rightarrow$ srovnání s $\int_0^1\frac{px}{x^n}\,dx \Rightarrow 1-n>-1 \Rightarrow$ KONV

$1-n\le -1 \Rightarrow$ DIV.

$n\in\mathbb{N}$, tedy pouze pro $n=1$ je šance na konvergenci

$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\operatorname{arctg} px}{x^n}}{\frac{1}{x^n}}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ srovnání s $\int_1^\infty\frac{dx}{x^n} \Rightarrow -n<-1 \Rightarrow$ KONV

$-n\ge -1 \Rightarrow$ DIV.

Tedy DIV i pro $n=1$.

• $p<0$: $\operatorname{arctg} px=-\operatorname{arctg}|p|x$, tedy $\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg} px}{x^n}\,dx=-\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}|p|x}{x^n}\,dx$, kterýžto integrál jsme právě vyšetřili.

ZÁVĚR: $p=0,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ konv.

$p\ne0,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ div.

b) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\,dx$ ... integrand je spojitý na $(0,1]$ ... problematický bod je jen 0

$\operatorname{tg} x = x + o(x^2) = x\cdot(1+o(x))$ ... Maclaurin 2. stupně

$\Downarrow$

srovnáme $\operatorname{tg} x$ s $x$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{\frac{x}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\,dx$ K $\Leftrightarrow$ $\int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx$ K $\qquad \int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 < \infty \Rightarrow$ KONV.

---

ú3 c) $\int_0^\infty \frac{x \sin x}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{x+1}{x+1}\sin x - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1} = \int_0^\infty \sin x\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}\,dx$

integrand je spojitý na $[0,\infty)$ ... problematické je jen $\infty$

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}\,dx$ konverguje dle Dirichleta: $\frac{1}{x+1} \searrow 0$ pro $x\to\infty$

$\left|\int_0^M \sin x\right| = |\cos 0 - \cos M| \le 2 \quad \forall M \in (0,\infty)$

$\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{x\to\infty} \cos x - \lim_{x\to 0+} \cos x$ NEEX. $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x+1}\,dx$ DIVERGUJE

---

(19) ú2 c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(-1,1)$, problematické jsou oba kraje

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} \Rightarrow \text{srovnáme s } \frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ v } 1$$

a s $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ v $-1$

v 1: $\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} \overset{\text{VOAL}}{\underset{\text{VOLSF}}{=}} \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}\,dy$ KONV.

subst. $y = 1-x$

v $-1$: $\lim_{x\to -1+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} \overset{\text{VOAL}}{\underset{\text{VOLSF}}{=}} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}\,dz$ KONV.

subst. $z = 1+x$

Tedy $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONVERGUJE

---

d) $\int_0^1 x^{\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{\ln^2 x}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(0,1]$, problém je v 0.

Pro $0<x<e^{-1}$ je $\ln x < -1$, tedy $x^{\ln x} > x^{-1}$ pro $0<x<e^{-1}(<1)$

$$\int_0^1 x^{\ln x}\,dx = \int_0^{e^{-1}} x^{\ln x}\,dx + \underbrace{\int_{e^{-1}}^1 x^{\ln x}\,dx}_{\in\mathbb{R}} > \int_0^{e^{-1}} x^{-1}\,dx + c = +\infty \Rightarrow \text{DIV.}$$

h) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}$ $\qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos x}$ ... integrand je spojitý na $(0,\frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2},\pi]$.

$$\left|\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{N}(0,\pi) \Rightarrow \left|\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}\right| \in \mathcal{N}(0,\pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}} \in \mathcal{N}(0,\pi).$$

---

(11) i) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\ln^2(1+x)}$ ... integrand spojitý na $(0,\frac{1}{2}]$, problém v 0.

• $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\qquad$ • $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{\arcsin y}{y} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3} \overset{VoLSF}{=} 1$

Srovnáme tedy $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot\ln^2(1+x)}}{\frac{(x^2+x^3)}{x\cdot x^2}} = \lim \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3}\cdot\frac{x^2}{\ln^2(1+x)} = 1$

$\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot\ln^2(1+x)}\,dx$ KONV. $\iff \displaystyle\int_0^{1/2}\frac{x^2+x^3}{x\cdot x^2}\,dx$ KONV.

$\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{x^2+x^3}{x^3}\,dx = \int_0^{1/2}\frac{1}{x}+1\,dx = +\infty$, tedy DIV. $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{1/2}\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot\ln^2(1+x)}$ DIV.

---

j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}$ ... integrand spojitý na $(1,2]$, problém v 1.

• $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1} = 1$

Srovnání: $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}}{\frac{(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}} = \lim_{x\to 1+}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1} = 1$

Stačí tedy zjistit $\displaystyle\int_1^2\frac{x-1}{(x-\sqrt{x})^p}\,dx = \int_1^2\frac{x-1}{(\sqrt{x})^p\cdot(\sqrt{x}-1)^p} = \int_1^2\frac{(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p\,(\sqrt{x}-1)^p}\,dx$

Srovnání: $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p\,(\sqrt{x}-1)^p}}{(\sqrt{x}-1)^{1-p}} \underset{VoLSF}{\overset{VoAL}{=}} 2 \Rightarrow$ stačí zjistit $\displaystyle\int_1^2(\sqrt{x}-1)^{1-p}\,dx$

Taylor v 1 z $\sqrt{x}$: $\quad \sqrt{x} = 1+\frac{1}{2}(x-1)+o(x-1)$ $\qquad \Rightarrow$ srovnání $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\frac{(\sqrt{x}-1)^{1-p}}{(\frac{1}{2}(x-1))^{1-p}} = 1$

$\Rightarrow$ stačí zjistit $\displaystyle\int_1^2 (x-1)^{1-p}\,dx = \int_0^1 y^{1-p}\,dy \Rightarrow 1-p > -1 \iff p < 2 \Rightarrow$ KONV.

subst. $y = x-1$, $dy = dx$, $x\in(1,2)\mapsto y\in(0,1)$ $\qquad \Rightarrow 1-p \le -1 \iff p \ge 2 \Rightarrow$ DIV.