20. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je **spojitá** funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2 (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $-\infty < a < b \leq \infty$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou **spojité** a nechť g je **kladná** na $[a, b)$.

1. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak také $\int_a^b f$ konverguje.
2. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ konverguje.
3. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b g$ diverguje, pak také $\int_a^b f$ diverguje.

Věta 3 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f **spojitá** na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Algoritmus

1. Je funkce spojitá na omezeném intervalu? Lze ji spojitě dodefinovat?
2. Je možné integrál přímo upočítat? Je možné jej (např. substitucí) převést na tabulkový integrál?
3. Srovnávací a limitní srovnávací kritérium.

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R}$):

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^\alpha}$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1-\cos(ax)}{x^p}\,\mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_0^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

(o) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg}^a x}{x^b}\,dx$

(p) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan\frac{x}{x^2+1}\ln^a x\,dx$

(q) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^4}\,\mathrm{d}x$

2. Pro které hodnoty parametrů následující integrály **absolutně** konvergují? Přiřaďte.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^a\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{1/e} x^a|\ln x|^b\,dx$

(d) $\displaystyle\int_e^{+\infty} x^a \ln^b x\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a e^{bx}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a e^{bx}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^a}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x^a}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a}\,dx$

(1) $a < -1$.

(2) $a < 1$.

(3) $a < 2$.

(4) $a > -1$.

(5) $a > 1$,

(6) $a > 1$,

(7) $a \in \mathbb{R}$ a $b < 0$ nebo $b = 0$ a $a < -1$.

(8) $a > -1$ a $b < 0$

(9) $a < -1$, $b \in \mathbb{R}$ nebo $a = -1$, $b < -1$

(10) $a > -1$, $b \in \mathbb{R}$ nebo $a = -1$, $b < -1$

3. Nechť f je definována na intervalu (a, ∞), je spojitá a $f \geq 0$ na (a, ∞). Nechť existuje limita $\lim_{x\to\infty} f(x) = A > 0$. Ukažte, že pak $\int_a^\infty f = \infty$.

4. Nechť $f \geq 0$, $f \in \mathcal{N}(0,1)$. Dokažte, že pak i $x^k f \in \mathcal{N}(0,1)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.