18. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $a, b \in R^*$, $a < b$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že *funkce f má na intervalu (a, b) Newtonův integrál*, případně že *Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje*, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny R^*.

Hodnotou Newtonotva integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbb{R}^*$ určený výrazem

$$\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Věta 2 (Per partes pro určitý integrál)**.** Nechť funkce F je primitivní k f na (a, b), G je primitivní ke g na (a, b). Potom

$$\int_a^b gF = [GF]_a^b - \int_a^b Gf,$$

pokud je pravá strana definována.

Věta 3 (Substituce pro určitý integrál)**.** Nechť $\omega : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ splňuje $\omega((\alpha, \beta)) = (a, b)$ a ω má vlastní nenulovou derivaci na (α, β). Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f \circ \omega)(t)|\omega'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Poznámka 4. Lze psát i takto:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Příklady

Spočtěte Newtonovy integrály:

(03) $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$

(04) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

(25) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x+1}\,\mathrm{d}x$

(29) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+3}\,\mathrm{d}x$

(35) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$

(40) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$

(42) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(44) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,\mathrm{d}x$

(49) $\displaystyle\int_0^{1} \operatorname{arccos}^2 x\,\mathrm{d}x$

(48) $\displaystyle\int_0^{1} x\arcsin x\,\mathrm{d}x$

(62) $\displaystyle\int_0^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(71) $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\mathrm{d}x$

(75) $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-2}{x-4}}\,\mathrm{d}x$

(87) $\displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x+2\sin x+3}$

(95) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\operatorname{tg} x}$