17. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $a, b \in R^*$, $a < b$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že *funkce f má na intervalu (a, b) Newtonův integrál*, případně že *Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje*, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny R^*.

Hodnotou Newtonotva integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbb{R}^*$ určený výrazem

$$\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Věta 2 (Per partes pro určitý integrál)**.** Nechť funkce F je primitivní k f na (a, b), G je primitivní ke g na (a, b). Potom

$$\int_a^b gF = [GF]_a^b - \int_a^b Gf,$$

pokud je pravá strana definována.

Věta 3 (Substituce pro určitý integrál)**.** Nechť $\omega : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ splňuje $\omega((\alpha, \beta)) = (a, b)$ a ω má vlastní nenulovou derivaci na (α, β). Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f \circ \omega)(t)|\omega'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Poznámka 4. Lze psát i takto:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Příklady

Spočtěte Newtonovy integrály:

1. (a) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$

   Řešení:

   $$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) + 1 = 2.$$

(b) $\displaystyle\int_1^2 3x^2 + 2x + 1\,\mathrm{d}x$
Řešení:

$$\int_1^2 3x^2 + 2x + 1\,\mathrm{d}x = [x^3 + x^2 + x]_1^2 = (2^3 + 2^2 + 2^1) - (1^3 - 1^2 - 1^1) = 11,$$

(c) $\displaystyle\int_1^2 2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$
Řešení:

$$\int_1^2 2+\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[2x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{x}\right]_1^2 = 2{\cdot}2+\frac{2}{3}\sqrt{2^3}-\frac{1}{2}-\left(2\cdot 1 + \frac{2}{3}\sqrt{1^3} - \frac{1}{1}\right) = \frac{11}{6}+\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

(d) $\displaystyle\int_{-5}^0 \frac{2}{3-4x}\,\mathrm{d}x$
Řešení:

$$\int_{-5}^0 \frac{2}{3-4x}\,\mathrm{d}x = \left[2\frac{\ln|3-4x|}{-4}\right]_{-5}^0 = -\frac{1}{2}\,(\ln 3 - \ln 23)$$

(e) $\displaystyle\int_{-7}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$
Řešení:

$$\int_{-7}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x = \left[-2\sqrt{2-x}\right]_{-7}^{-2} = -2(2-3) = 2.$$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
Řešení:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan x]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \arctan x - \lim_{x\to 0+} \arctan x = \frac{\pi}{2} - 0.$$

(g) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
Řešení:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_2^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x - \lim_{x\to 2+} \ln x = \infty - \ln 2 = \infty.$$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,\mathrm{d}x$ **Řešení:**

$$\int_{-\infty}^0 e^x\,\mathrm{d}x = [e^x]_{-\infty}^0 = \lim_{x\to 0-} e^x - \lim_{x\to -\infty} e^x = 1 - 0 = 1$$

(i) $\int_0^\infty e^x \,\mathrm{d}x$ **Řešení:**

$$\int_0^\infty e^x \,\mathrm{d}x = [e^x]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} e^x - \lim_{x\to 0+} e^x = \infty - 1 = \infty.$$

(j) $\int_0^\infty \sin x \,\mathrm{d}x$ **Řešení:**

$$\int_0^\infty \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\infty = \lim_{x\to\infty}(-\cos x) - \lim_{x\to 0+}(-\cos x)$$

Ježto první limita neexistuje, neexistuje ani Newtonův integrál $\int_0^\infty \sin x \,\mathrm{d}x$.

2. (a) $\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Substituce $y = x^3 + 1,\ \mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x$, meze budou 2 a 9.

$$\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int_2^9 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = [\ln|y|]_2^9 = \ln 9 - \ln 2.$$

(b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x \,\mathrm{d}x$

Řešení:

Substituce $y = \sin x,\ \mathrm{d}y = \cos x\,\mathrm{d}x$, meze budou $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ a $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} y\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{8}.$$

(c) $\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes

$$\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2x}\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

(d) $\int_0^\pi x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Dvakrát per partes

$$\int_0^\pi x^2\sin x\,\mathrm{d}x = [-x^2\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi 2x\cos x\,\mathrm{d}x = [-x^2\cos x + 2x\sin x]_0^\pi - 2\int_0^\pi \sin x = [-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x]_0^\pi = \pi^2 - 4$$

(e) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Substituce $y = \ln x,\ \mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, meze 0 a 1.

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 1+\frac{-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [x-\arctan x]_{-1}^1 = 2-\frac{\pi}{2}.$$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+3)^5}$ **Řešení:**

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+3)^5} = \left[\frac{-1}{4(x+3)^4}\right]_0^\infty = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{4(x+3)^4} - \lim_{x\to 0+}\frac{-1}{4(x+3)^4} = \frac{1}{4\cdot 81}$$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} + \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Prve substituce $y = e^x,\ \mathrm{d}y = e^x\,\mathrm{d}x$,

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} = \int_1^e \frac{1}{x^2+1} = [\arctan x]_1^e = \arctan e - \arctan 1 = \arctan e - \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\,[\tan x]_0^1 = \tan\ 1.$$

Celkem

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} + \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \arctan e - \frac{\pi}{4} + \tan\ 1$$

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Substituce $y = \sqrt{x},\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^\infty 2e^{-y}\,\mathrm{d}y = 2\left[-e^{-y}\right]_1^\infty = -2(\lim_{y\to\infty} e^{-y} - \lim_{x\to 1+} e^{-y}) \\ &= -2\left(0-\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}.\end{aligned}$$

(j) $\int_a^b \operatorname{sgn} x \,\mathrm{d}x$, $a < 0$, $b > 0$

Řešení: Integrál neexistuje, protože funkce sgn$x$ nemá na daném intervalu (kolem nuly) primitivní funkci - není darbouxovská.

(k) $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$

Řešení: Substituce $y = \arctan x,\ \mathrm{d}y = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$:

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} y\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32}.$$

(l) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$

Řešení: Substituce $y = \ln x,\ \mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$,

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = [\ln y]_0^{\ln 2} = \lim_{y\to \ln 2-} \ln y - \lim_{y \to 0+} \ln y = \ln(\ln 2) - (-\infty) = \infty.$$

(m)

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Substituce $y = \cos x,\ \mathrm{d}y = -\sin x\,\mathrm{d}x$

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = [\arctan y]_{-1}^1 = \arctan 1 - \arctan(-1) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

(n) $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Dvakrát per partes:

$$\int_{-1}^1 x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2e^{-x}\right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 2xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2e^{-x}\right]_{-1}^1 + \left[-2xe^{-x}\right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\right]_{-1}^1 = e - 5e^{-1}$$

(o) $\int_2^3 \frac{x^2-x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int_2^3 \frac{x^2-x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 x + \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x-1|\right]_2^3 = \frac{9}{2} + \ln 2 - \left(\frac{4}{2} + \ln 1\right) = \frac{5}{2} + \ln 2.$$