17. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $a, b \in R^*$, $a < b$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že *funkce f má na intervalu (a, b) Newtonův integrál*, případně že *Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje*, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny R^*.

Hodnotou Newtonotva integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny $\mathbb{R}^*$ určený výrazem

$$\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Věta 2 (Per partes pro určitý integrál)**.** Nechť funkce F je primitivní k f na (a, b), G je primitivní ke g na (a, b). Potom

$$\int_a^b gF = [GF]_a^b - \int_a^b Gf,$$

pokud je pravá strana definována.

Věta 3 (Substituce pro určitý integrál)**.** Nechť $\omega : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ splňuje $\omega((\alpha, \beta)) = (a, b)$ a ω má vlastní nenulovou derivaci na (α, β). Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f \circ \omega)(t)|\omega'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Poznámka 4. Lze psát i takto:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Příklady

Spočtěte Newtonovy integrály:

1. (a) $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_1^2 3x^2 + 2x + 1\,\mathrm{d}x$ (c) $\int_1^2 2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{-5}^{0} \frac{2}{3-4x}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_{-7}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^x\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$

2. (a) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{3x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{2} x \ln x\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x+3)^5}$

(h) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x}{e^{2x}+1} + \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_{a}^{b} \mathrm{sgn} x\ \mathrm{d}x,\ a<0,\ b>0$

(k) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$

(m) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1}\,\mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(o) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x^2-x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x$