

16. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. typ $R(x, \sqrt[n]{x+a})$

$$(a) f(x) = \frac{1}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}.$$

Řešení:

Použijeme substituci $t = \sqrt[6]{x}$. Potom

$$\frac{dt}{dx} = (x^{1/6})' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6t^5},$$

a tedy $dx = 6t^5 dt$. Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{1}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx = \int \frac{1}{t^6(1 + 2t^3 + t^2)} 6t^5 dt = 6 \int \frac{1}{t(1 + t^2 + 2t^3)} dt.$$

Trojčlen ve jmenovateli má zřejmě kořen -1 a lze jej tedy rozložit na tvar $(t+1)(2t^2 - t + 1)$. Dále postupujeme rozkladem na parciální zlomky.

$$\frac{1}{t(t+1)(2t^2 - t + 1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct + D}{2t^2 - t + 1}$$

Přenásobením jmenovateli dostaneme

$$1 = A(t+1)(2t^2 - t + 1) + Bt(2t^2 - t + 1) + (Ct + D)t(t+1).$$

Dosažením $t = 0$ a $t = -1$ dostaneme, že $A = 1$ a $B = -\frac{1}{4}$. Porovnáním koeficientu u t^3 máme, že $2A + 2B + C = 0$, tedy $C = -2A - 2B = -\frac{3}{2}$, a porovnáním koeficientů u lineárního členu máme, že $B + D = 0$, tedy že $D = -B = \frac{1}{4}$. Odtud vyplývá, že

$$\frac{1}{t(t+1)(2t^2 - t + 1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{4} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{8} \frac{6t-1}{t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}}.$$

Integrály prvních dvou členů jsou zřejmé, poslední člen integrujeme dalším rozkladem na

$$\frac{1}{8} \frac{6t - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{3}{8} \frac{2t - \frac{1}{2}}{t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}} + \frac{1}{16} \frac{1}{t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}}.$$

První ze sčítanců pak lze integrovat substitucí jmenovatele, druhý podle vzorce

$$\int \frac{dy}{y^2 + py + q} \stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2y + p}{\sqrt{4q - p^2}}, \quad \text{je-li } 4q > p^2.$$

Kombinací všech výsledků dostaneme, že

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx &= 6 \int \frac{1}{t(1+t^2+2t^3)} dt \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} 6 \ln t - \frac{6}{4} \ln(1+t) - \frac{18}{8} \ln\left(t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{6}{16} \frac{2}{\sqrt{2-\frac{1}{4}}} \arctan \frac{2t-\frac{1}{2}}{\sqrt{2-\frac{1}{4}}} \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} 6 \ln t - \frac{3}{2} \ln(1+t) - \frac{9}{4} \ln(2t^2-t+1) - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4t-1}{\sqrt{7}} = \\ &= \ln x - \frac{3}{2} \ln(1+\sqrt[6]{x}) - \frac{9}{4} \ln(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1) - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Ve druhém řádku jsme použili fakt, že $\ln(g(t)) \stackrel{C}{=} \ln(ag(t))$ pro každé $a > 0$, tedy že rozšířením výrazu uvnitř logaritmu kladným číslem získáme až na konstantu stejný výraz (se stejným definičním oborem). Logaritmy ve výrazu můžeme ještě sjednotit do jednoho, například takto:

$$\frac{3}{4} \ln \frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1)^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$$

Původní funkce je spojitá (a definovaná) na $(0, \infty)$. Tamtéž je definovaná substituce a tamtéž vyjde výsledná funkce.

(b) $f(x) = \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

Řešení:

Použijeme substituci $t = \sqrt[6]{x+1}$. Potom $dx = 6t^5 dt$ a

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx = \int \frac{1-t^3}{1+t^2} 6t^5 dt.$$

Protože

$$(-t^8+t^5) : (t^2+1) = -t^6+t^4+t^3-t^2-t+1 + \frac{t-1}{1+t^2}$$

je

$$\begin{aligned} \int \frac{1-t^3}{1+t^2} 6t^5 dt &= 6 \int \left(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1 + \frac{1}{2} \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 3 \ln(1+t^2) - 6 \arctan t, \\ &= -\frac{6}{7}(\sqrt[6]{x+1})^7 + \frac{6}{5}(\sqrt[6]{x+1})^5 + \frac{3}{2}(\sqrt[6]{x+1})^4 - 2(\sqrt[6]{x+1})^3 - 3(\sqrt[6]{x+1})^2 + 6(\sqrt[6]{x+1}) \\ &\quad + 3 \ln(1+(\sqrt[6]{x+1})^2) - 6 \arctan(\sqrt[6]{x+1}) \end{aligned}$$

Funguje pro $x \in (-1, \infty)$.

$$(c) f(x) = \frac{1}{(1 + \sqrt[4]{x})^3 \sqrt{x}}.$$

Řešení:

Použijeme substituci $t = \sqrt[4]{x}$. Potom

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{4}x^{-3/4} = \frac{1}{4}t^{-3},$$

a tedy $dx = 4t^3 dt$. Odtud

$$\int \frac{1}{(1 + \sqrt[4]{x})^3 \sqrt{x}} dx = \int \frac{4t^3}{(1+t)^3 t^2} dt = \int \frac{4t}{(1+t)^3} dt.$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{4t}{(1+t)^3} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{(1+t)^3}.$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme

$$4t = A(1+t)^2 + B(1+t) + C,$$

odkud dosazením $t = -1$ dostáváme, že $C = -4$. Dále máme, že

$$4t = (A + B + C) + (2A + B)t + At^2,$$

odkud ihned máme, že $A = 0$ a $B = 4$. Tudíž

$$\begin{aligned} \int \frac{4t}{(1+t)^3} dt &= \int \left(\frac{4}{(1+t)^2} - \frac{4}{(1+t)^3} \right) dt \stackrel{C}{=} -\frac{4}{1+t} + \frac{2}{(1+t)^2} \\ &= -\frac{2+4t}{(1+t)^2} = -\frac{2+4\sqrt[4]{x}}{(1+\sqrt[4]{x})^2}. \end{aligned}$$

Pro $x \in (0, \infty)$.

2. typ $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

$$(a) f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$

Řešení: Definičním oborem funkce f je interval $[1, +\infty)$, maximální otevřenou podmnožinou je interval $(1, +\infty)$. Primitivní funkci stačí určit na tomto intervalu.

Výraz nejprve upravíme vytknutím

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}$$

a poté použijeme substituci

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

odkud máme

$$x = -\frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2t(1-t^2) + 2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} = \frac{4t}{(1+t^2)^2}.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} dx = \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{4t}{(1+t^2)^2} dt =$$

standardním rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$= \int \left(\frac{2}{1+t} - \frac{2t-2}{1+t^2} - \frac{4}{(1+t^2)^2} \right) dt = \int \left(\frac{2}{1+t} - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{2}{1+t^2} - \frac{4}{(1+t^2)^2} \right) dt$$

druhý sčítanec integrujeme substitucí jmenovatele, čtvrtý například substitucí $t = \operatorname{tg} y$

$$\stackrel{C}{=} 2 \ln |1+t| - \ln(1+t^2) + 2 \arctan t - 2 \arctan t - \frac{2t}{1+t^2} = \ln \frac{(1+t)^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2},$$

zbývá dosadit za t :

$$= \ln \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2}{1 + \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2} - \frac{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{1 + \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2},$$

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

Řešení:

Upravme

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \frac{1}{(x-1)^2} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2/3}$$

a použijeme substituci

$$t = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/3}, \quad x = \frac{t^3+1}{1-t^3}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2(1-t^3) + 3t^2(1+t^3)}{(1-t^3)^2} = \frac{6t^2}{(1-t^3)^2}.$$

Odtud také vyplývá, že

$$x-1 = \frac{t^3+1}{1-t^3} - 1 = \frac{2t^3}{1-t^3}.$$

Dostáváme tak, že

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} &= \int \frac{1}{(x-1)^2} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2/3} dx = \int \frac{(1-t^3)^2}{4t^6} \cdot t^2 \cdot \frac{6t^2}{(1-t^3)^2} dt \\ &= \int \frac{3}{2t^2} dt \stackrel{C}{=} -\frac{3}{2t} = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}. \end{aligned}$$

Pro $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

(c)

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{x} dx$$

Řešení:

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt$$

tedy

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{x} dx &= \int t \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{-4t dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{-4t^2 dt}{(1-t^2)(1+t^2)} = \int \frac{-2}{1-t^2} + \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= 2 \arctan t - \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1 - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \right| \end{aligned}$$

Pro $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

3. typ $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

(a)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx$$

Řešení: Substituce $\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{1}x = t$

$$x = \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}$$

$$dx = \frac{-t^2 + 2t - 4}{2(1-t)^2}$$

čili

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx &= \int \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)} \frac{1}{t + \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}} \frac{-t^2 + 2t - 4}{2(1-t)^2} dt = \\
&= \int \frac{1}{2} \frac{(t+2)(t-2)}{(1-t)^2} dt = \frac{1}{2} \int 1 + 2 \frac{t-1}{(t-1)^2} - \frac{3}{(t-1)^2} dt = \\
&= \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x + 2 \ln |\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1| + \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1} \right)
\end{aligned}$$

Pro $x \in \mathbb{R}$.

(b)

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{-x^2 + x + 2}}$$

Řešení: viz <http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html>

374

(c)

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Řešení: viz <http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html>

375

(d)

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x - 1}}$$

Řešení: viz <http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html>

376

(374) Pomocí vhodné substituce vypočítejte

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{-x^2 + x + 2}}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{1 + \sqrt{-x^2 + x + 2}} \quad | \text{polynom } -x^2 + x + 2 \text{ má reálné kořeny } 2, -1 | = \\ & = \int \frac{dx}{1 + (x+1)\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}} \quad \left| \begin{array}{l} t^2 = \frac{2-x}{x+1} \\ x = \frac{2-t^2}{t^2+1} \\ x+1 = \frac{3}{t^2+1} \\ dx = \frac{-6t}{(t^2+1)^2} dt \end{array} \right. = \int \frac{\frac{-6t}{(t^2+1)^2}}{1 + \frac{3}{t^2+1} t} dt = \\ & = \int \frac{-6t}{(t^2+1)^2} \frac{t^2+1}{t^2+3t+1} dt = -6 \int \frac{t}{(t^2+1)(t^2+3t+1)} dt = \\ & = \int \left(\frac{4}{5} \frac{\sqrt{5}}{2t+3+\sqrt{5}} - \frac{2}{t^2+1} - \frac{4}{5} \frac{\sqrt{5}}{-2t-3+\sqrt{5}} \right) dt = \\ & = -\frac{4\sqrt{5}}{5} \frac{1}{2} \ln |2t+3+\sqrt{5}| - 2 \operatorname{arctg} t - \frac{4\sqrt{5}}{5} \left(-\frac{1}{2} \right) \ln |-2t-3+\sqrt{5}| + C = \\ & = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \ln \left| 2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} + 3 + \sqrt{5} \right| + \frac{2\sqrt{5}}{5} \ln \left| -2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} - 3 + \sqrt{5} \right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-x}{x+1}} + C. \end{aligned}$$

(375) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} \left| \begin{array}{l} \text{polynom } x^2+x+1 \text{ nemá reálné kořeny} \\ \sqrt{x^2+x+1} = x+t \\ x = \frac{1-t^2}{2t-1} \\ x-1 = -\frac{t^2+2t-2}{2t-1} \\ x+t = \frac{t^2-t+1}{2t-1} \\ dx = \frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2} dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}}{-\frac{t^2+2t-2}{2t-1} \frac{t^2-t+1}{2t-1}} dt = \int \frac{2}{t^2+2t-2} dt = \int \left(-\frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{t+1+\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{-t-1+\sqrt{3}} \right) dt =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3} \ln |t+1+\sqrt{3}| + \frac{\sqrt{3}}{3} \ln |-t-1+\sqrt{3}| =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x+1+\sqrt{3}}{x-\sqrt{x^2+x+1}-1+\sqrt{3}} \right| + C.$$

(376) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} \left| \begin{array}{l} \text{polynom } x^2 - x + 1 \text{ nemá reálné kořeny} \\ \sqrt{x^2 - x + 1} = t - x \\ x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1} \\ dx = \frac{2(t^2 - t + 1)}{(2t - 1)^2} dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2(t^2 - t + 1)}{(2t - 1)^2}}{\frac{t^2 - 1}{2t - 1} + t - \frac{t^2 - 1}{2t - 1}} dt = 2 \int \frac{t^2 - t + 1}{t(2t - 1)^2} dt =$$

$$= \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t - 1} + \frac{3}{(2t - 1)^2} \right) dt \left| \begin{array}{l} u = 2t - 1 \\ du = 2dt \end{array} \right| = 2 \ln |t| + \int \left(-\frac{3}{2u} + \frac{3}{2u^2} \right) du =$$

$$= 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |u| - \frac{3}{2u} = 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |2t - 1| - \frac{3}{2(2t - 1)} + C =$$

$$= 2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - x + 1} \right| - \frac{3}{2} \ln \left| 2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1 \right| - \frac{1}{4x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2} + C.$$

4. Ostatní

(a) $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}$. **Řešení:**

Použijeme substituci

$$t = \sqrt{x} + \sqrt{1+x}.$$

Potom

$$x = \left(\frac{t^2 - 1}{2t}\right)^2, \quad \frac{dx}{dt} = 2 \cdot \frac{t^2 - 1}{2t} \cdot \frac{4t^2 - 2t^2 + 2}{4t^2} = \frac{t^2 - 1}{t} \cdot \frac{t^2 + 1}{2t^2}$$

a máme

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(t-1)(t^2+1)}{t^3} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^3 - t^2 + t - 1}{t^3} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right) dt \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \left(t - \ln|t| - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}\right) = \\ &\frac{1}{2} \left(\sqrt{x} + \sqrt{1+x} - \ln|\sqrt{x} + \sqrt{1+x}| - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{x} + (\sqrt{1+x})^2}\right). \end{aligned}$$

Pro $x > 0$.