14. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Příklady

Najděte primitivní funkce na největším možném intervalu:

1. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sin^2 x}$

(397) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{1+t} = -\ln|1+t|+C = -\ln|1+\cos x|+C.$$

(393) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\, dt = \int \frac{1}{1+2t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C.$$

3. $f(x) = \dfrac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$

Řešení:

Použijeme substituci $t = \mathrm{tg}\ x$. Pak platí, že

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = (\mathrm{tg}\ ^2 x + 1)\,dx = (t^2+1)\,dx \implies dx = \frac{dt}{t^2+1}$$

Dostáváme tak, že

$$\int \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\,dx = \int \frac{3t^2+1}{t^2+3}\frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

který dále řešíme rozkladem na parciální zlomky. Ve zlomku

$$\frac{3t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)}$$

formálně pišme y místo t^2. Pak podle věty o rozkladu na parciální zlomky máme, že

$$\frac{3y+1}{(y+3)(y+1)} = \frac{A}{y+3} + \frac{B}{y+1}$$
$$3y+1 = A(y+1) + B(y+3)$$

a dosazením $y = -1$ dostaneme, že $B = -1$, dosazením $y = -3$ dostaneme, že $A = 4$. Platí tedy, že

$$\frac{3t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)} = \frac{4}{t^2+3} - \frac{1}{t^2+1}$$

Nyní dokončíme integraci

$$= \int \frac{3t^2+1}{t^2+3}\frac{1}{t^2+1}\,dt = \int \left(\frac{4}{t^2+3} - \frac{1}{t^2+1}\right) dt \overset{C}{=} \frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctan}\ \frac{t}{\sqrt{3}} - \mathrm{arctan}\ t$$
$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctan}\ \frac{\mathrm{tg}\ x}{\sqrt{3}} - \mathrm{arctan}\ (\mathrm{tg}\ x)$$

4. $f(x) = \dfrac{\cos^3 x}{2 - \sin x}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{2 - \cos x}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

(398) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{2-t}\,dt = \int \left(2+t+\frac{3}{t-2}\right)dt =$$

$$= 2t+\frac{t^2}{2}+3\ln|t-2|+C = 2\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+3\ln|\sin x-2|+C.$$

(396) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{2-\cos x}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{2-\cos x} \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2}{3t^2+1}\,dt = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

(391) Pomocí vhodné substituce vypočtěte
$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right| = \int -\frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} =$$
$$= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{2} \ln|t+1| + C =$$
$$= \frac{1}{2} \ln|\cos x - 1| - \frac{1}{2} \ln|\cos x + 1| + C == \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C =$$
$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}^2 \tfrac{x}{2} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \tfrac{x}{2} \right| + C.$$

7. (!) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x \sin^3 x}$

Řešení: Protože $f(\sin x, \cos x) = f(-\sin x, -\cos x)$, použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$. Protože

$$\frac{1}{\cos x \sin^3 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1+t^2}{t}\frac{1+t^2}{t^2}$$

a

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

dostáváme

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \int \frac{t^2+1}{t^3}\,dt \overset{C}{=} \ln|t| - \frac{1}{2}t^2 = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}$$

Podotkněme, že platí

$$\frac{1}{2\tan^2 x} = \frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x} \overset{C}{=} \frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin^2 x}$$

8. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x - \cos x}$

9. $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$

(399) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\, dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1}\, dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{t-1} \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$
$$= \int \frac{t}{(t-1)(t^2+1)}\, dt = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{1}{2} \frac{1-t}{t^2+1} \right) dt =$$
$$= \frac{1}{2} \ln|t-1| + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1}\, dt + \int \frac{dt}{t^2+1} \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{4} \ln\left|t^2+1\right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C =$$
$$= \frac{1}{2} \ln|\operatorname{tg} x - 1| - \frac{1}{4} \ln\left|\operatorname{tg}^2 x + 1\right| + \frac{x}{2} + C.$$

(392) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}\,dx \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{1 + 4t^2 + 3 - 3t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{t^2 + 4 - 5}{t^2 + 4}\,dt = \int \left(1 - 5\frac{1}{t^2 + 4}\right) dt = t - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C =$$

$$= \cos x - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{2} + C.$$

10. (!) $f(x) = \text{tg}^{\,5} x$

Řešení: Použijeme substituci $t = \text{tg}\, x$. Pak platí, že

$$\mathrm{d}x = \frac{dt}{t^2+1}$$

Dostáváme tak

$$\int \text{tg}^{\,5} x\, dx = \int \frac{t^5}{t^2+1}\, dt = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1}\right) dt \overset{C}{=} \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$$
$$= \frac{1}{4}\text{tg}^{\,4} x - \frac{1}{2}\text{tg}^{\,2} x + \frac{1}{2}\ln(1+\text{tg}^{\,2} x)$$

11. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\sin x}$

Řešení: Použijeme substituci $t = \text{tg}\, \frac{x}{2}$. Pak platí, že

$$dx = \frac{2\, dt}{t^2+1}$$

a dále platí

$$\sin x = 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} = 2\text{tg}\,\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\text{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^{\,2}\frac{x}{2}} = \frac{2t}{t^2+1}$$

Dostáváme tak, že

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\, dx = \int \frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{2t}{t^2+1}} \cdot \frac{2}{t^2+1}\, dt = \int \frac{4t}{(t^2+1)(t^2+2t+1)}\, dt$$
$$= \int \frac{4t}{(t^2+1(t+1)^2}\, dt =$$

a nyní postupujeme rozkladem na parciální zlomky, který hledáme ve tvaru

$$\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

Odkud přenásobením vyplývá

$$4t = A(t+1)(t^2+1) + B(t^2+1) + (Ct+D)(t+1)^2$$

Dosazením $t = -1$ dostaneme, že $B = -2$. Dosazením $t = i$ dostaneme

$$4i = (Ci+D)(1+i)^2 = (Ci+D) \cdot 2i$$
$$2 = Ci + D$$

odkud plyne, že $C = 0$ a $D = 2$. Zpětným dosazením dostaneme

$$4t = A(t+1)(t^2+1) - 2(t^2+1) + 2(t+1)^2$$

a porovnáním absolutním členů vidíme, že $0 = A - 2 + 2$, tedy, že $A = 0$. Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = -\frac{2}{(t+1)^2} + \frac{2}{t^2+1}$$

Dokončeme integraci.

$$= \int \frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = -\int \frac{2}{(t+1)^2}\, dt + \int \frac{2}{t^2+1}\, dt \overset{C}{=} \frac{2}{t+1} + 2\arctan t = \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + 2\arctan\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

12. $f(x) = \dfrac{2-\sin x}{2+\cos x}$

• (7) $y = \tan x$ • (10) $y = \tan x$

(400) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2+2t^2-2t}{2+2t^2+1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 4\int \frac{t^2-t+1}{(1+t^2)(t^2+3)}\,dt = 2\int \frac{2+t}{t^2+3}\,dt - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+3}\,dt + 4\int \frac{dt}{t^2+3} - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+3}\,dt + \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \ln\left|t^2+3\right| + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \ln\left|1+t^2\right| + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\right| - \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right| + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$