13. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Pro substituci $x = \text{tg } t$ platí vztahy:

$$t = \arctan x \qquad \sin^2 t = \frac{x^2}{1+x^2}, \qquad \cos^2 t = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \sin t \cos t = \frac{x}{1+x^2} \tag{1}$$

Příklady

Najděte primitivní funkce na největším možném intervalu:

1. $f(x) = -\frac{3}{16}\frac{1}{(x^2+1)^2}$

   Řešení: Integrujeme pomocí substituce $x = \text{tg } t$.

$$\begin{aligned}&\int -\frac{3}{16}\frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{16}\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} -\frac{3}{32}(t + \sin t \cos t)\\ &= -\frac{3}{32}\arctan x - \frac{3}{32}\frac{x}{x^2+1}\end{aligned}$$

2. $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$

   Řešení: Výsledný zlomek máme přímo ve tvaru rozkladu na parciální zlomky, budeme tedy přímo počítat integrál. Provedeme jej převedením jmenovatele na čtverec a goniometrickou substitucí.

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{9}\int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1]^2}\,\mathrm{d}x =$$

   Nyní použijeme substituci $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \text{tg } t$ a dostaneme, že

$$\begin{aligned}&= \frac{16}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{(\text{tg }^2+1)^2}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} \frac{4\sqrt{3}}{9}(t + \sin t \cos t)\\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+(\sqrt{3})^2}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2x+1)^2+(\sqrt{3})^2}}\\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\end{aligned}$$

3. $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}$

   Řešení:

Hledejme rozklad ve tvaru

$$\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem a roznásobením dostaneme

$$x^2 = (Ax+B)(x^2+2x+2) + (Cx+D)$$

$$x^2 = Ax^3 + 2Ax^2 + 2Ax + Bx^2 + 2Bx + 2B + Cx + D$$

odkud vyplývá, že $A = 0$, $B = 1$, $C = -2$ a $D = -2$. Hledaný rozklad má tvar

$$\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}$$

Platí, že

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \overset{C}{=} \operatorname{arctan}\,(x+1)$$

$$-\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx \overset{C}{=} \frac{1}{x^2+2x+2}$$

odkud máme, že

$$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \operatorname{arctan}\,(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2}$$

4. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

Řešení: Zlomek již máme připraven ve tvaru vhodném k integraci. Použijeme substituci $x = \operatorname{tg}\, t$. Dostaneme, že

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(\operatorname{tg}\,^2 t+1)^3}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \cos^4 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$
$$= \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2t + \cos^2 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{8}\int (3+4\cos 2t+\cos 4t)\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t$$
$$= \frac{3}{8}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{1}{16}\sin 2t(2\cos^2 t - 1)$$
$$= \frac{3}{8}\operatorname{arctan}\,x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{16}\frac{x}{x^2+1}\left(\frac{2}{x^2+1} - 1\right)$$
$$= \frac{3}{8}\operatorname{arctan}\,x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{8}\frac{x(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{8}\operatorname{arctan}\,x + \frac{1}{8}\frac{3x^3+5x}{(x^2+1)^2}$$

5. $f(x) = \dfrac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$

Řešení: Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2+3x-2 = A(x^2+x+1)^2 + (Bx+C)(x^2+x+1)(x-1) + (Dx+E)(x-1)$$

Roznásobením pravé strany máme

$$x^2+3x-2 = A-C-E+2Ax-Bx-Dx+Ex+3Ax^2+Dx^2+2Ax^3+Cx^3+Ax^4+Bx^4$$

odkud porovnáním koeficientů dostaneme, že

$$A = \frac{2}{9},\ B = -\frac{2}{9},\ C = -\frac{4}{9},\ D = \frac{1}{3},\ E = \frac{8}{3}$$

Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{2}{9}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{9}\frac{x+2}{x^2+x+1} + \frac{1}{3}\frac{x+8}{(x^2+x+1)^2}$$

Jednotlivé zlomky budeme integrovat zvlášť. Platí, že

$$\int \frac{2}{9}\frac{1}{x-1}\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{2}{9}\ln|x-1|$$

$$-\frac{2}{9}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{9}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+x+1}\ \mathrm{d}x \overset{C}{=}$$
$$\overset{C}{=} -\frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

a nakonec

$$\frac{1}{3}\int \frac{x+8}{(x^2+x+1)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\ \mathrm{d}x + \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\ \mathrm{d}x \overset{C}{=}$$

(Druhý integrál počítáme převedením jmenovatele na kanonický tvar $(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} = \frac{3}{4}[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1]$ a substitucí $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} t$.)

$$\overset{C}{=} \frac{-1}{6}\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{5}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Dohromady dostaneme po úpravě

$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{3}\frac{5x+2}{x^2+x+1} + \frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

6. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}$

   Řešení: Jmenovatel lze rozložit na součin kvadratických trojčlenů

$$(x^4+x^2+1)^2 = (x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$$

   Z toho vyplývá, že rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Kx+L}{x^2-x+1} + \frac{Mx+N}{(x^2-x+1)^2}$$

   Například metodou neurčitých koeficientů dostaneme, že

$$A = B = C = D = L = N = \frac{1}{4}, \quad K = M = -\frac{1}{4}$$

   Integrací jednotlivých zlomků dostaneme po úpravách

$$\int \frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{8}\ln(x^2+x+1)$$

$$\int \frac{1}{4}\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{6\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12}\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

$$\int -\frac{1}{4}\frac{x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{8}\ln(x^2-x+1)$$

$$\int -\frac{1}{4}\frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{6\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{12}\frac{x+1}{x^2-x+1}$$

   Sečtením a úpravami dostaneme, že

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$\overset{C}{=} \frac{5}{12\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{12\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{8}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x^2+1}{x^4+x^2+1}$$

7. $f(x) = \dfrac{1}{(x^3+1)^2}$

   Řešení: Platí, že

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

   Rozklad tedy musíme hledat ve tvaru

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2}$$

   Přenásobením jmenovatelem dostaneme

$$\begin{aligned}1 &= A(x+1)(x^2-x+1)^2 + B(x^2-x+1)^2\\ &\quad + (Cx+D)(x+1)^2(x^2-x+1) + (Ex+F)(x^2-x+1)^2\end{aligned}$$

Roznásobením pravé strany máme

$$1 = A{+}B{+}D{+}F{-}Ax{-}2Bx{+}Cx{+}Dx{+}2Fx{+}Ex{+}Ax^2{+}3Bx^2{+}Cx^2{+}Fx^2{+}2Ex^2{+}$$
$$+Ax^3 - 2Bx^3 + Dx^3 + Ex^3 - Ax^4 + Bx^4 + Cx^4 + Dx^4 + Ax^5 + Cx^5$$

odkud sestavíme porovnáním koeficientů soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
1 &= A + B + D + F \\
0 &= -A - 2B + C + D + E + 2F \\
0 &= A + 3B + C + F + 2E \\
0 &= A - 2B + D + E \\
0 &= -A + B + C + D \\
0 &= A + C
\end{aligned}$$

jejíž řešení je

$$A = \frac{2}{9},\ B = \frac{1}{9},\ C = -\frac{2}{9},\ D = \frac{1}{3},\ E = -\frac{1}{3},\ F = \frac{1}{3}$$

a hledaný rozklad tedy má tvar

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{2}{9}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{9}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{9}\frac{2x-3}{x^2-x+1} - \frac{1}{3}\frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}$$

Budeme integrovat zvlášť jednotlivé zlomky. Platí, že

$$\int \frac{2}{9}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{2}{9}\ln|x+1|$$

$$\int \frac{1}{9}\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{9}\frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{9}\frac{2x-3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{9}\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2}{9}\frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{C}{=} \frac{1}{9}\ln(x^2-x+1) - \frac{4}{9\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

a nakonec

$$\int \frac{1}{3}\frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{6}\frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{6}\frac{1}{x^2-x+1} - \int \frac{1}{6}\frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Zbylý integrál vypočteme takto:

$$\int \frac{1}{6}\frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}\frac{16}{9}\frac{1}{\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]^2}\,\mathrm{d}x =$$

nyní aplikujeme substituci tg $t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, přičemž máme, že $\frac{1}{\cos^2 t}$ d$t = \frac{2}{\sqrt{3}}$ dx, a proto

$$= \int \frac{1}{6}\frac{8}{3\sqrt{3}}\frac{1}{(\text{tg }^2 t+1)^2}\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4}{9\sqrt{3}}\cos^4 t\,\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4}{9\sqrt{3}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{4}{9\sqrt{3}}\frac{t+\sin t\cos t}{2} = \frac{2}{9\sqrt{3}}\text{arctan }\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{9\sqrt{3}}\frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2+3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2x-1)^2+3}}$$

$$= \frac{2}{9\sqrt{3}}\text{arctan }\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{18}\frac{(2x-1)}{x^2-x+1}$$

Dáme-li jednotlivé výsledky dohromady, dostáváme

$$\int \frac{1}{(x^3+1)^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} - \frac{1}{9(x+1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\text{arctan }\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9}\frac{x+1}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\text{arctan }\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\frac{x}{x^3+1}$$

8. $f(x) = \dfrac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$.

Řešení:

Proveďme substituci $t = x^5$.

$$\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{t}{(t^2+2t+2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}\int \frac{2t}{(t+1)^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{10}\int \frac{2t+2-2}{((t+1)^2+1)^2}\,\mathrm{d}t == \frac{1}{10}\int \frac{2t+2}{((t+1)^2+1)^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{5}\int \frac{1}{((t+1)^2+1)^2}\,\mathrm{d}t =$$

Na první integrál použijeme substituci $u = (t+1)^2+1$, na druhý $t+1 = $ tg y a s přihlédnutím ke vztahům

$$\frac{1}{\text{tg }^2 y+1} = \cos^2 y, \qquad \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 y}\,\mathrm{d}y$$

dostaneme, že

$$= \frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} - \frac{1}{5}\int \cos^2 y\,\mathrm{d}y \stackrel{C}{=} -\frac{1}{10}\frac{1}{u} - \frac{1}{5}\frac{y+\sin y\cos y}{2} =$$

$$= -\frac{1}{10}\frac{1}{(t+1)^2+1} - \frac{1}{10}y - \frac{1}{10}\text{tg } y\cos^2 y =$$

$$= -\frac{1}{10}\frac{1}{t^2+2t+2} - \frac{1}{10}\text{arctan }(t+1) - \frac{1}{10}\frac{\text{tg } y}{\text{tg }^2 y+1} =$$

$$= -\frac{1}{10}\frac{1}{x^{10}+2x^5+2} - \frac{1}{10}\text{arctan }(x^5+1) - \frac{1}{10}\frac{x^5+1}{x^{10}+2x^5+2} =$$

$$= -\frac{1}{10}\frac{x^5+2}{x^{10}+2x^5+2} - \frac{1}{10}\text{arctan }(x^5+1).$$