12. cvičení – vzorové příklady

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Algoritmus

1. Zkontrolujeme stupně polynomů, případně podělíme
2. Zkontrolujeme, zda nejdou rozložit kvadratické trojčleny
3. Rozložíme na parciální zlomky
4. Zintegrujeme

Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$

   Řešení:

   Rozkladem na parciální zlomky můžeme postupovat následovně: hledáme koeficienty A, B tak, aby

   $$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

   Přenásobením této rovnice $(x-2)(x+5)$ dostaneme rovnost

   $$2x+3 = A(x+5) + B(x-2)$$

   Rovnost platí pro každé x. Dosazením $x = 2$ dostaneme, že $7 = 7A + 0$, a tedy $A = 1$. Dosazením $x = -5$ dostaneme, že $-7 = -7B$, a tedy $B = 1$. Odtud vyplývá, že

   $$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x+5}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \ln|x-2| + \ln|x+5|$$

2. $f(x) = \dfrac{x}{x^3-3x+2}$

   Řešení:

   Protože stupeň polynomu v čitateli je menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, není potřeba zlomek před rozkladem na parciální zlomky upravovat.

   Nejprve najděme rozklad jmenovatele. Uhodneme, že číslo 1 je kořenem polynomu $x^3 - 3x + 2$. Potom platí, že

   $$(x^3 - 3x + 2) : (x-1) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

a tedy platí, že
$$(x^3 - 3x + 2) = (x-1)^2(x+2)$$
Rozklad na parciální zlomky budeme hledat ve tvaru
$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$
Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah
$$x = A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2$$
Dosazením $x = 1$ a $x = -2$ dostaneme, že
$$1 = 3A \implies A = \frac{1}{3}$$
$$-2 = 9C \implies C = -\frac{2}{9}$$
Nakonec třeba dosazením $x = 0$ dostaneme, že
$$0 = 2A - 2B + C \implies B = A + \frac{C}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$
Odtud vyplývá, že platí
$$\int \frac{x}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{9}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{9}\frac{1}{x+2}\right)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=}$$
$$\overset{C}{=} -\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{2}{9}\ln|x+2| = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$

Řešení:

Platí, že
$$(x^2-4x+4)(x^2-4x+5) = (x-2)^2(x^2-4x+5)$$
přičemž druhý kvadratický trojčlen je nerozložitelný (nemá reálné kořeny). Hledáme tedy rozklad ve tvaru
$$\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-4x+5}$$
Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah
$$1 = A(x-2)(x^2-4x+5) + B(x^2-4x+5) + (Cx+D)(x-2)^2,$$

odkud dosazením $x = 2$ dostaneme, že $B = 1$. Roznásobením v předchozím vztahu a porovnáním koeficientů na levé a pravé straně

$$1 = A(x-2)(x^2-4x+5) + (x^2-4x+5) + (Cx+D)(x-2)^2$$

$$1 = 5-10A+4D-4x+13Ax+4Cx-4Dx+x^2-6Ax^2-4Cx^2+Dx^2+Ax^3+Cx^3$$

dostaneme soustavu rovnic

$$1 = 5 - 10A + 4D$$

$$0 = -4 + 13A + 4C - 4D$$

$$0 = 1 - 6A + 4C + D$$

$$0 = A + C$$

Ta má řešení $A = 0$, $C = 0$, $D = -1$. Odtud máme, že hledaný rozklad má tvar

$$\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-4x+5}$$

Odtud vyplývá

$$\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{x-2} - \int \frac{1}{1+(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{x-2} - \arctan\,(x-2)$$

4. $\displaystyle\int \frac{x^6+2x-1}{x^5-x^2}\,\mathrm{d}x$

(4)

(349) Vypočtěte

$$\int \frac{x^6+2x-1}{x^5-x^2}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{x^6+2x-1}{x^5-x^2}\,dx = \int x\,dx - 2\int \frac{dx}{x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{2}{3}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \int \frac{dx}{x^2} =$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{2}{3}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{x} + C.$$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-7}{(x-1)(x^2-4x+5)}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Hledáme rozklad ve tvaru

$$\int \frac{x^2+2x-7}{(x-1)(x^2-4x+5)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x$$

Roznásobením dostáváme

$$x^2+2x-7 = A(x^2-4x+5)+Bx(x-1)+C(x-1) = Ax^2-4Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$\begin{aligned} x^2: &\qquad 1 = A+B \\ x: &\qquad 2 = -4A-B+C \\ 1: &\qquad -7 = 5A-C \end{aligned}$$

Vyjde: $A=-2$, $B=3$, $C=-3$, tedy

$$\int \frac{-2}{x-1} + \frac{3x-3}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x$$

První integrál:

$$\int \frac{-2}{x-1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -2\ln|x-1|$$

U druhého integrálu bychom v čitateli rádi viděli $2x-4$. Tedy:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-3}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x &= \frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x-2-2+2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Dále

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{3}{2}\ln|x^2-4x+5|$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2}{(x-2)^2+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} 3\mathrm{arctan}\,(x-2)$$

Celkem získáváme

$$-2\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x^2-4x+5| + 3\mathrm{arctan}\,(x-2) + c$$