10. cvičení - Substituce a Per partes

Substituce

Substituce používáme na integrály tvaru

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \,\mathrm{d}x.$$

Důležité je, že je tam součin a že se tam vyskytuje nějaká funkce a její derivace.

Příklad:

$$\int \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$$

nebo

$$\int e^{(x^3)} \cdot 3x^2 \,\mathrm{d}x.$$

V takovém případě můžeme použít 1. větu o substituci (ještě bude za týden následovat druhá) a položíme $f(y) = e^y$, $\varphi(x) = x^3$. Zkontrolujeme, že $\varphi' = 3x^2$ a že integrál je správného tvaru.

Spočteme $F(y) = e^y$ (primitivní funkci k f).

Doladíme intervaly. Funkce e^y je definovaná na $(-\infty, \infty)$ a tamtéž má primitivní funkci, takže $(a, b) = (-\infty, \infty)$.

Funkce x^3 je definovaná na $(-\infty, \infty)$, což bude naše (α, β). Hodnoty má pak v $(-\infty, \infty)$, což je v pořádku.

Řešením je pak:

$$\int e^{(x^3)} \cdot 3x^2 \,\mathrm{d}x = e^{x^3} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro příklad s kosinem by platilo: $f(y) = \cos y$, $\varphi(x) = \ln x$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, $F(y) = \sin y$. Navíc $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$.

Výsledkem by bylo

$$\int \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \sin(\ln x) + C, \quad x \in (0, \infty).$$

Substituce - alternativní zápis

V praxi se obvykle používá jiný zápis. Ukážeme na příkladě:

$$\int e^{(x^3)} \cdot 3x^2 \,\mathrm{d}x.$$

Položíme $y = x^3$. (Tady y hraje roli $\varphi(x)$.) „Zderivujeme“ obě strany a zapíšeme symbolicky takto

$$\mathrm{d}y = 3x^2 \,\mathrm{d}x.$$

Nyní vyměníme všechna x^3 za y a $3x^2\,\mathrm{d}x$ za $\mathrm{d}y$. Dostaneme

$$\int e^{(x^3)} \cdot 3x^2\,\mathrm{d}x = \int e^y\,\mathrm{d}y.$$

Tím jsme dostali nový integrál, kde integrujeme dle y. Vyřešíme:

$$\int e^y\,\mathrm{d}y = e^y + C.$$

Přepíšeme zpátky y za x^3 a jsme hotovi, tedy celé:

$$\int e^{(x^3)} \cdot 3x^2\,\mathrm{d}x = \int e^y\,\mathrm{d}y = e^y + C = e^{x^3} + C.$$

I v tomto zápise je pak třeba si rozmyslet, co bylo f, co φ a ověřit podmínky.

Poznámky

1. Někdy je třeba integrál před substitucí nejprve upravit, abychom lépe viděli $\varphi'(x)$. Například

   $$\int \ln(2\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \ln(2\cos x)(-2\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

   Někdy je třeba upravovat hodně, typicky až po úpravách je vidět, že budeme substituovat za $\cos x$.

   $$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1-\cos^2 x}\sin x\,\mathrm{d}x.$$

2. Přestože se v literatuře občas objevují operace s $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$, prosím, vyhněte se jim. Symbol $\mathrm{d}x$ (a $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ atd.) sice má nějaký význam, ale pro nás je to jen symbol. Nelze jím ani jej dělit, násobit, ani násobit konstantou ani nic jiného. Pomáhá nám substituovat, ale jinak ho necháváme na pokoji. Zejména tedy nepíšeme $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$ nebo $\mathrm{d}y/2\ldots$

3. Bez ohledu na to, jakým kouzlem najdeme primitivní funkci, tak správnost řešení se dá ověřit - zderivujeme. Pokud tedy najdeme takovou funkci a interval, že její derivace na tom intervalu existuje a navíc se rovná zadané funkci, máme primitivní funkci. (A z věty o jednoznačnosti primitivní funkce víme, že máme všechny až na konstantu.)

   Pokud si nejste úplně jisti legálností svého postupu, tohle je alespoň nějaká pojistka, i když není jisté, že za to v písemce budou všechny body. Proto důrazně doporučujeme ověřovat podmínky vět.

4. I na tuto pojistku je navíc potřeba dávat pozor. Příklad, který se substitucí nesouvisí: mechanickým zderivováním neodhalíme, že $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ není $\ln x$, ale $\ln|x|$. Tady je jistou nápovědou, že nám něco chybí, že se definiční obor $\frac{1}{x}$ a $\ln x$ opravdu velmi výrazně liší.

Per partes

Per partes používáme na integrály obsahující součin. Typicky na kombinace polynomu a něčeho, vizte tabulky

	v(x)	u'(x)
$P(x) \cdot e^{kx}$	$P(x)$	e^{kx}
$P(x) \cdot a^{kx}$	$P(x)$	a^{kx}
$P(x) \cdot \sin(kx)$	$P(x)$	$\sin(kx)$
$P(x) \cdot \cos(kx)$	$P(x)$	$\cos(kx)$

	v(x)	u'(x)
$P(x) \cdot \ln^n x$	$\ln^n x$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arcsin\,(kx)$	$\arcsin\,(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arccos\,(kx)$	$\arccos\,(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arctan\,(kx)$	$\arctan\,(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \mathrm{arcctg}\,(kx)$	$\mathrm{arcctg}\,(kx)$	$P(x)$

Trik s jedničkou

Některé funkce si vyžadují trik s jedničkou:

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x.$$

Tím tam dostaneme součin, který můžeme per partesit. Funguje též na funkce $\arctan x$, $\mathrm{arccot}\, x$, $\arcsin x$, $\arccos x$. A překvapivě na $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Trik s převodem doleva

Další obvyklou možností je $e^x \cos x$ a $e^x \sin x$. Prohlédněte si, prosím, vzorové řešení v Tutoriálu nebo v řešení cvičení.

U tohoto typu nezáleží, jestli položíme e^x jako v nebo u', vyjde to oběma cestami. Důležité je zvolit to dvakrát stejně, tedy např. e^x je u prvního per partes v a u druhého per partes také v. Jestliže vyjde rovnice $0 = 0$, zvolili jste jednou v a jednou u'.

Poznámky

Existuje několik dalších integrálů, co jsou na Per partes, i když tak nevypadají. Prozkoumejte cvičení.

Substituce vs. Per partes

Aneb kdy co použít. Položme si otázky:

1. Vyskytuje se tam funkce a její derivace? $\to$ Substituce
2. Nedá se integrand (funkce uvnitř integrálu) nějak upravit, aby tam byla funkce a její derivace? $\to$ Substituce
3. Je tam součin funkcí, který se vyskytuje v tabulkách u Per partes? $\to$ Per partes.

4. Nezabere trik s jedničkou nebo převodem per partes na levou stranu? $\rightarrow$ Per partes.

5. Když to na nic nevypadá, zkusme postupně zvolit Per partes v různé kombinaci u' a v, per partes s jedničkou nebo pronásobit a upravit funkci, aby byla na substituci.

No a nakonec je potřeba dávat pozor, podobné integrály se mohou řešit jeden per partes, kdežto druhý substitucí. Např.

$$\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x$$

vs.

$$\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pěknou zábavu.