10. cvičení - per partes

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Integrace per partes)**.** Nechť I je neprázdný otevřený interval a funkce f je spojitá na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Poznámka 2. Objevuje se i v podobě:

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Poznámka 3. Nechť $P(x)$ značí polynom. V následujících tabulkách je pak nápověda, jak zvolit v per partes. (Jako každá nápověda, funguje to často, ale ne nutně vždycky.)

	v(x)	u'(x)
$P(x)\cdot e^{kx}$	$P(x)$	e^{kx}
$P(x)\cdot a^{kx}$	$P(x)$	a^{kx}
$P(x)\cdot \sin(kx)$	$P(x)$	$\sin(kx)$
$P(x)\cdot \cos(kx)$	$P(x)$	$\cos(kx)$

	v(x)	u'(x)
$P(x)\cdot \ln^n x$	$\ln^n x$	$P(x)$
$P(x)\cdot \arcsin(kx)$	$\arcsin(kx)$	$P(x)$
$P(x)\cdot \arccos(kx)$	$\arccos(kx)$	$P(x)$
$P(x)\cdot \arctan(kx)$	$\arctan(kx)$	$P(x)$
$P(x)\cdot \operatorname{arcctg}(kx)$	$\operatorname{arcctg}(kx)$	$P(x)$

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na otevřené podmnožině jejího definičního oboru, kde primitivní funkce existuje.

1. $f(x) = xe^{-x}$

   Řešení: Per partes: $u' = e^{-x}$, $u = -e^{-x}$, $v = x$, $v' = 1$.

   $$\int xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right] - \int -e^{-x}\,dx \overset{C}{=} -xe^{-x} - e^{-x}$$

2. $f(x) = x\cos x$

   Řešení: Per partes: $u' = \cos x$, $u = \sin x$, $v = x$, $v' = 1$.

   $$\int x\cos x\,dx = [x\sin x] - \int \sin x\,dx \overset{C}{=} x\sin x + \cos x$$

3. $f(x) = \ln x$

   Řešení:

Položme $u' = 1$, $v = \ln x$. Potom $u = \int 1\,dx = x$ a $v' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ a použitím vztahu pro integraci per partes dostáváme

$$\int \ln x\,dx = [x \ln x] - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \overset{C}{=} x \ln x - x$$

4. $f(x) = \sin x \ln(\operatorname{tg} x)$

   Řešení: Per partes: $u' = \sin x$, $u = -\cos x$, $v = \ln(\operatorname{tg} x)$, $v' = \frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$.

$$\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\,dx = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \int \frac{1}{\sin x}\,dx \overset{C}{=} -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$$

5. $f(x) = \arctan x$

   Řešení:

   Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \arctan x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\int 1 \cdot \arctan x\,dx = [x\arctan x] - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

   Substituce $y = 1 + x^2$.

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy \overset{C}{=} x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|y| = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

6. $f(x) = x^2 e^{-2x}$

   Řešení:

   První per partes: $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = x^2$, $v' = 2x$.

$$\int x^2 e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 e^{-2x}\right] + \int x e^{-2x}\,dx =$$

   Druhé per partes: $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = x$, $v' = 1$.

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + \left[-\frac{1}{2}x e^{-2x}\right] + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx \overset{C}{=} -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4}\int e^{-2x}$$

7. $f(x) = x^2 \sin 2x$

   Řešení:

   První per partes: $u' = \sin 2x$, $u = -\frac{1}{2}\cos 2x$, $v = x^2$, $v' = 2x$.

$$\int x^2 \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 \cos 2x\right] + \int x \cos 2x =$$

   Druhé per partes: $u' = \cos 2x$, $u = \frac{1}{2}\sin 2x$, $v = x$, $v' = 1$.

$$= -\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \left[\frac{1}{2}x \sin 2x\right] - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx \overset{C}{=} -\frac{1}{2}x^2 \cos 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$$

8. $f(x) = \arcsin x$

Řešení:

Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \arcsin x$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int 1 \cdot \arcsin x \, dx = [x\arcsin x] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

Substituce $y = 1 - x^2$.

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy \overset{C}{=} x\arcsin x + \sqrt{y} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

9. $f(x) = \arctan \sqrt{x}$

Řešení: Per partes: $u' = 1$, $u = x + 1$ (mnohem výhodnější než mechanické x), $v = \arctan \sqrt{x}$, $v' = \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\int \arctan \sqrt{x} \, dx = \left[(x+1)\arctan \sqrt{x}\right] - \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx \overset{C}{=} (x+1)\arctan \sqrt{x} - \sqrt{x}$$

10. $f(x) = x^n \ln x$, $n \neq -1$

Řešení:

Položme $u' = x^n$, $v = \ln x$. Potom $u = x^{n+1}/n + 1$ a $v' = \frac{1}{x}$. Integrace per partes dává

$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} \, dx \overset{C}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

11. $f(x) = x^3 e^{-x^2}$

Řešení:

Provedeme substituci $y = x^2$. Pak $dy = 2x \, dx$ a platí

$$\int x^3 e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int y e^{-y} \, dy =$$

Nyní aplikujeme per partes: $u' = e^{-y}$, $u = -e^{-y}$, $v = y$, $v' = 1$.

$$= \left[-ye^{-y}\right] + \int e^{-y} \, dy \overset{C}{=} -ye^{-y} - e^{-y} = -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}$$

12. $f(x) = \sqrt{x} \ln^2 x$

Řešení: První per partes: $u' = \sqrt{x}$, $u = \frac{2}{3} x^{3/2}$, $v = \ln^2 x$, $v' = 2 \ln x \frac{1}{x}$.

$$\int \sqrt{x} \ln^2 x \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \ln^2 x\right] - \int \frac{2}{3} x^{1/2} \ln x \, dx =$$

Druhé per partes: $u' = \frac{2}{3} x^{1/2}$, $u = \frac{4}{9} x^{3/2}$, $v = \ln x$, $v' = 1/x$.

$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \ln^2 x\right] - \left[\frac{4}{9} x^{3/2} \ln x\right] + \int \frac{4}{9} x^{1/2} \, dx \overset{C}{=} \frac{2}{3} x^{3/2} \ln^2 x - \frac{4}{9} x^{3/2} \ln x + \frac{8}{27} x^{3/2}$$

13. $f(x) = x\text{arctan } x$

Řešení: Per partes: $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \text{arctan } x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\int x\text{arctan } x \, dx = \frac{1}{2}x^2\text{arctan } x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}x^2\text{arctan } x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\text{arctan } x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \overset{C}{=} \frac{1}{2}x^2\text{arctan } x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\text{arctan } x$$

14. $f(x) = x^2\text{arccos } x$

Řešení: Per partes: $u' = x^2$, $u = \frac{x^3}{3}$, $v = \text{arccos } x$, $v' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int x^2\text{arccos } x \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\text{arccos } x\right] + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

Substituce $y = 1 - x^2$, odkud plyne $dy = -2x\, dx$ a $x^2 = 1 - y$.

$$= \frac{x^3}{3}\text{arccos } x + \frac{1}{6}\int \frac{y-1}{\sqrt{y}}\, dy = \frac{x^3}{3}\text{arccos } x + \frac{1}{6}\int \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) dy \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} \frac{x^3}{3}\text{arccos } x + \frac{1}{9}y^{3/2} - \frac{1}{3}y^{1/2} = \frac{x^3}{3}\text{arccos } x + \frac{1}{9}(1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{1/2}$$

15. $f(x) = \dfrac{\text{arcsin } x}{x^2}$

Řešení: Per partes: $u' = \frac{1}{x^2}$, $u = -\frac{1}{x}$, $v = \text{arcsin } x$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{\text{arcsin } x}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\text{arcsin } x\right] + \int \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

Substituce $y = \sqrt{1-x^2}$. Potom $dy = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ a $x^2 = 1 - y^2$.

$$= -\frac{1}{x}\text{arcsin } x + \int \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{1}{x}\text{arcsin } x + \int \frac{1}{1-y^2}\, dy \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} -\frac{1}{x}\text{arcsin } x + \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = -\frac{1}{x}\text{arcsin } x + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

16. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

Řešení: Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\int 1 \cdot \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx = \left[x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \overset{C}{=}$$

$$x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$$

Poslední integrál lze počítat např. substitucí $y = 1 + x^2$.

17. $f(x) = x \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

Řešení: Per partes: $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \ln \frac{1+x}{1-x}$, $v' = \frac{1}{1-x^2}$.

$$\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1+1}{1-x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right) dx \overset{C}{=} \frac{1}{2}x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}x \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

18. $f(x) = \sin(\ln x)$

Řešení: Použijeme integraci per partes, položme $v' = 1$, $u = \sin(\ln x)$. Potom $v = x$ a $u' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$. Dostaneme, že

$$\int 1 \cdot \sin(\ln x) = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na $v' = 1$ a $u = \cos(\ln x)$ a dostaneme

$$\int 1 \cdot \sin(\ln x) = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2 \int 1 \cdot \sin(\ln x) \overset{C}{=} x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)$$

$$\int \sin(\ln x) \overset{C}{=} \frac{1}{2}x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$$

19. $f(x) = \cos(\ln x)$

Řešení: Použijeme integraci per partes, položme $v' = 1$, $u = \cos(\ln x)$. Potom $v = x$ a $u' = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$. Dostaneme, že

$$\int 1 \cdot \sin(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na $v' = 1$ a $u = \sin(\ln x)$ a dostaneme

$$\int 1 \cdot \sin(\ln x) = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2 \int 1 \cdot \cos(\ln x) \overset{C}{=} x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)$$

$$\int \cos(\ln x) \overset{C}{=} \frac{1}{2}x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

20. $e^x \sin x$

Řešení: http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/zakladni-integracni-metody.html č. 330

21. $f(x) = e^{ax} \cos bx$

Řešení:

Pro $a = b = 0$ je $\int e^{0x} \cos(0x)\ \mathrm{d}x = \int 1\ \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} x$.

Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponencielu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^{ax} \cos bx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx\ \mathrm{d}x.$$

Odtud vyplývá, že

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos bx\ \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx$$

$$\int e^{ax} \cos bx\ \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left(b \sin bx + a \cos bx\right)$$

Lehko se ověří, že výsledek platí i pro $b = 0$, pokud $a \neq 0$, a také pro $a = 0$, pokud $b \neq 0$.

22. $f(x) = e^{ax} \sin bx$

Řešení:

Pro $b = 0$ je $\int e^{ax} \sin(0x)\ \mathrm{d}x = \int 0\ \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} 1$.

Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponencielu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x.$$

Odtud vyplývá, že

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx$$

$$\int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} -\frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left(a \sin bx - b \cos bx\right)$$

Lehko se ověří, že výsledek platí i pro $a = 0$, pokud $b \neq 0$.