10. cvičení - per partes

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Integrace per partes)**.** Nechť I je neprázdný otevřený interval a funkce f je spojitá na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Poznámka 2. Objevuje se i v podobě:

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Poznámka 3. Nechť $P(x)$ značí polynom. V následujících tabulkách je pak nápověda, jak zvolit v per partes. (Jako každá nápověda, funguje to často, ale ne nutně vždycky.)

	v(x)	u'(x)
$P(x)\cdot e^{kx}$	$P(x)$	e^{kx}
$P(x)\cdot a^{kx}$	$P(x)$	a^{kx}
$P(x)\cdot \sin(kx)$	$P(x)$	$\sin(kx)$
$P(x)\cdot \cos(kx)$	$P(x)$	$\cos(kx)$

	v(x)	u'(x)
$P(x)\cdot \ln^n x$	$\ln^n x$	$P(x)$
$P(x)\cdot \arcsin\,(kx)$	$\arcsin\,(kx)$	$P(x)$
$P(x)\cdot \arccos\,(kx)$	$\arccos\,(kx)$	$P(x)$
$P(x)\cdot \arctan\,(kx)$	$\arctan\,(kx)$	$P(x)$
$P(x)\cdot \mathrm{arcctg}\,(kx)$	$\mathrm{arcctg}\,(kx)$	$P(x)$

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na otevřené podmnožině jejího definičního oboru, kde primitivní funkce existuje.

1. xe^{-x}
2. $x\cos x$
3. $\ln x$
4. $\sin x \ln(\mathrm{tg}\ x)$
5. $\arctan x$
6. x^2e^{-2x}
7. $x^2\sin 2x$
8. $\arcsin x$
9. $\arctan\sqrt{x}$
10. $x^n\ln x$, $n\neq -1$
11. $x^3e^{-x^2}$
12. $\sqrt{x}\ln^2 x$
13. $x\arctan x$
14. $x^2\arccos x$
15. $\dfrac{\arcsin x}{x^2}$
16. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$
17. $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}$
18. $\sin(\ln x)$
19. $\cos(\ln x)$
20. $e^x\sin x$
21. $e^{ax}\cos bx$
22. $e^{ax}\sin bx$