9. Lineární substituce

Úvod do lineární substituce

Dalším krokem je lineární substituce.

Úloha 2 říká, že máme dokázat: Pokud $F'(x) = f(x)$, potom $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right)' = f(ax+b)$, pokud $a \neq 0$.

Pro integrování z toho plyne, že umíme-li zintegrovat funkci $f(x)$, tak umíme zintegrovat i funkci $f(ax+b)$.

Příklad. Víme, že $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c$. Pak umíme zintegrovat i $\int \cos(3x-2)\,\mathrm{d}x$. Funkce $\cos x$ je f, funkce $\sin x$ je F, a $3x-2 = ax+b$. Z větičky pak máme $\int \cos(3x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin(3x-2)+C$.

Dá se k tomu přistoupit i metodou zkusíme a uvidíme. Tedy, když víme, že $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$, tak by možná mohlo platit i $\int \cos(3x-2)\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \sin(3x-2)+C$.

Vyzkoušíme zpětně zderivovat. $(\sin(3x-2)+C)' = 3\cos(3x-2)$, což není přesně to, co potřebujeme, je to navíc vynásobeno trojkou. Z toho plyne, že kdybychom naši funkci vydělili trojkou, tak už to bude správně. Kontrola: $(\frac{1}{3}\sin(3x-2)+C)' = \frac{1}{3}3\cos(3x-2) = \cos(3x-2)$ Závěr tedy je: $\int \cos(3x-2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin(3x-2)+C$.

Drobnosti a varování

Někdy je třeba výraz nejdříve převést do vhodné podoby. Např.

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4(1+(x/2)^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot 2\mathrm{arctan}\,(x/2)+c = \frac{1}{2}\mathrm{arctan}\,(x/2)+c.$$

Naopak ne každý výraz, který vypadá na lineární substituci, jí opravdu je.

$$\int (5x^2+4)^2\,\mathrm{d}x \neq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}(5x^2+4)^3+c,$$

protože $5x^2+4$ není tvaru $ax+b$. Správně se integrál vyřeší roznásobením, tedy

$$\int (5x^2+4)^2\,\mathrm{d}x = \int 25x^4+40x^2+16dx = 5x^5+\frac{40x^3}{3}+16x+c.$$