3

Příklad M. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\ln(n^2+n)}{n^2}. \tag{M.1}$$

Řešení. Ze stejného důvodu jako v předchozím příkladě nemá smysl použít podílové nebo odmocninové kritérium. Technikami známými z výpočtů limit upravíme členy zadané řady, abychom našli řadu, se kterou budeme srovnávat:

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n} = (\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}$$

$$\ln(n^2+n) = \ln\left(n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln n^2 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2\ln n\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2\ln n}\right)$$

Vyjádřili jsme tedy členy řady (M.1) (označme je a_n) ve tvaru

$$a_n = \frac{4\ln n\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2\ln n}\right)}{n^2\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)},$$

jehož smysl tkví v tom, že nahrazením závorek jejich konečnými nenulovými limitami 1 (čitatel) resp. 2 (jmenovatel) dostaneme podstatně zjednodušený výraz vhodný jako člen srovnávací řady $\sum b_n$:

$$b_n = \frac{2\ln n}{n^2\sqrt{n}}.$$

Dokázat ekvivalenci konvergence obou řad je nyní triviální:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4\ln n\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2\ln n}\right)}{n^2\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}}{\frac{2\ln n}{n^2\sqrt{n}}} = 1 \in (0,\infty)$$

Členy srovnávací řady $\sum b_n$ jsou již maximálně zjednodušené, konvergenci této řady však neznáme. Je třeba opět použít srovnávací kritérium (tentokrát v nelimitní verzi) a porovnat řadu s nějakou řadou, jejíž konvergenci již budeme znát. Zde se nabízí použití řady $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, nejprve nás patrně napadne $\alpha = \frac{5}{2}$. Tento pokus je však odsouzen k neúspěchu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\ln n}{n^2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} 2\ln n = \infty,$$

skoro všechny členy řady $\sum b_n$ jsou tedy větší než členy konvergentní řady $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$, z čehož pochopitelně plyne jediný závěr, a to, že toto srovnání je k ničemu (poznamenejme, že pokud by byl člen $\ln n$ ve jmenovateli, byla by nerovnost opačná a příklad by byl vyřešen). Obtížný logaritmus v čitateli však můžeme „zneutralizovat" libovolně malou mocninou n:

$$\frac{2\ln n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{2\ln n}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{n^2} \quad \text{pro s.v. } n,$$

protože

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{\sqrt{n}} = 0,$$

což plyne ze vztahu $\ln^{k_1} n \ll n^{k_2}$ pro $k_1, k_2 > 0$. Členy řady b_n jsme tedy shora omezili členy konvergentní řady $\sum \frac{1}{n^2}$ (říkáme také, že tato řada je pro řadu b_n *konvergentní majorantou*), a tedy $\sum b_n$ i řada (M.1) absolutně konvergují.

2

Příklad N. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum \operatorname{tg} \frac{n^2}{2^n}\,. \tag{N.1}$$

Řešení. Příklady, ve kterých se vyskytuje transcendentní elementární funkce, jejímž argumentem je posloupnost jdoucí k nule (což zde plyne ze vztahu $n^k \ll q^n$ pro $k > 0$, $q > 1$), řešíme zpravidla na základě znalosti chování takové funkce v okolí nuly. V případě funkce $\operatorname{tg} x$ víme, že pro každé $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$ platí $\operatorname{tg} x \geq x$, čímž máme odhad funkce zdola. Zároveň $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a protože např. pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{3}\rangle$ je $\cos x \geq \frac{1}{2}$ (plyne to z toho, že funkce $\cos x$ je na tomto intervalu klesající a $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$) a $\sin x \leq x$, je na témž intervalu $\operatorname{tg} x \leq \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x$ (nerovnost plyne z toho, že jsme „zvětšili čitatel“ a „zmenšili jmenovatel“), což je omezení $\operatorname{tg} x$ shora. Interval platnosti zde není omezením – konverguje-li posloupnost kladných čísel k nule, bude libovolný interval $(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ obsahovat skoro všechny její členy. Řada $\sum \operatorname{tg} a_n$, kde $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ tedy bude konvergovat právě tehdy, když bude konvergovat $\sum a_n$, protože její členy omezují $\operatorname{tg} a_n$ zdola a členy posloupnosti $\sum 2a_n$, jejíž konvergence je ekvivalentní, shora. Zjistíme tedy nejprve, zda konverguje argument a pak pomocí něj omezíme vyšetřovanou řadu shora nebo zdola. Řada $\sum \frac{n^2}{2^n}$ je typickou řadou vhodnou pro užití podílového kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

a řada tedy konverguje. Podle předchozího odstavce tedy omezíme členy řady (N.1) shora:

$$\operatorname{tg} \frac{n^2}{2^n} \leq 2 \cdot \frac{n^2}{2^n} \quad \text{pro s.v. } n$$

a můžeme konstatovat, že řada (N.1) konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria.

Shrňme známé vlastnosti elementárních funkcí, které umožní jejich odhady v okolí nuly, resp. dalších důležitých bodů. Z předchozího odstavce máme pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{3}\rangle$: $x \leq \operatorname{tg} x \leq 2x$. Tento odhad však můžeme použít jen tehdy, je-li vnitřní posloupnost nezáporná. Z lichosti všech tří funkcí v nerovnosti však snadno dostaneme analogický odhad pro x nekladná: je-li $x \in \langle -\frac{\pi}{3}, 0\rangle$, platí $-x \leq \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \leq -2x$, neboli $x \geq \operatorname{tg} x \geq 2x$. Odhady pro nezáporná a nekladná x můžeme shrnout do jednoho: pro $x \in \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\rangle$ je $|x| \leq |\operatorname{tg} x| \leq 2|x|$.

Poznamenejme, že horní odhad lze zlepšit (tedy snížit), protože omezíme-li se na kratší interval (což lze, protože konverguje-li vnitřní posloupnost k nule, stačí odhad na libovolně malém intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$), můžeme zvýšit minimální hodnotu $\cos x$ na tomto intervalu (např. pro $x \in \langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\rangle$ platí $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ a tedy $|\operatorname{tg} x| \leq \frac{2|x|}{\sqrt{3}}$). Z předchozího odstavce je zřejmé, že v tomto případě by takové zlepšení nemělo smysl, v jiných příkladech (např. při použití nelimitního odmocninového kritéria) však ano. Další zlepšení umožňuje odhad funkce $\cos x$ nikoli konstantou, ale funkcí, což však překračuje rámec tohoto textu. Na rozdíl do horního odhadu uvedený spodní odhad zlepšit nelze (resp. ne multiplikativní konstantou) – pro žádné $\alpha > 1$ neplatí $\alpha|x| \leq |\operatorname{tg} x|$ na žádném intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$, což plyne okamžitě z toho, že horní odhad můžeme zkracováním intervalu snížit na libovolné $\alpha|x|$, $\alpha > 1$ (protože $\cos x$ je v dostatečně malém intervalu kolem nuly větší než $\frac{1}{\alpha}$).

Věnujme se nyní odhadům dalších funkcí. Víme, že pro $x \in \langle 0, \infty)$ je $\sin x \leq x$, máme tedy odhad funkce $\sin x$ shora. Zároveň pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$ platí $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \geq x$, neboli $\sin x \geq x \cos x$. Stejně jako při odvození odhadu $\operatorname{tg} x$ se můžeme omezit na interval $\langle 0, \frac{\pi}{3}\rangle$, kde platí $\cos x \geq \frac{1}{2}$ a tedy pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{3}\rangle$ máme $\frac{x}{2} \leq \sin x \leq x$. Stejně jako u $\operatorname{tg} x$ můžeme použít lichost pro odhad

2

v záporných x a dostaneme univerzální odhad: pro každé $x \in \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\rangle$ je $\frac{|x|}{2} \leq |\sin x| \leq |x|$. V tomto případě lze volbou užšího intervalu zlepšit dolní odhad, a to na $\alpha|x|$, kde $\alpha < 1$.

Odhady funkce $\operatorname{cotg} x$ můžeme velice snadno odvodit z již hotových odhadů pro $\operatorname{tg} x$. Pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ totiž platí $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, což spolu s odhady $\operatorname{tg} x$ dává pro $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{3}\right\rangle$ nerovnosti $\frac{1}{|x|} \geq \frac{1}{|\operatorname{tg} x|} = |\operatorname{cotg} x| \geq \frac{1}{2|x|}$. Odhad zdola lze zlepšit na $\frac{1}{\alpha|x|}$ pro $\alpha > 1$. Pro $x = 0$ nemá odhad pochopitelně smysl, protože v tomto bodě není funkce $\operatorname{cotg} x$ definována.

Zbývající goniometrickou funkci, $\cos x$, lze pomocí racionálních funkcí odhadnout také, tyto odhady však (byť je lze snadno odvodit ze získaných odhadů pro $\sin x$), překračují rámec tohoto textu. Pro naše účely postačí odhad pomocí konstant: pro $x \in \mathbb{R}$ je $\cos x \leq 1$ a např. pro $x \in \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\rangle$ je $\cos x \geq \frac{1}{2}$.

Překvapivě snadno lze pomocí již odvozených vztahů získat odhady „nepříjemných" cyklometrických funkcí – stačí využít toho, že jsou definovány jako inverzní funkce ke goniometrickým funkcím zúženým na určitý interval. Například dosadíme-li do odhadu $|y| \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow |y| \leq |\operatorname{tg} y| \leq 2|y|$ za y výraz $\operatorname{arctg} x$, dostaneme $|\operatorname{arctg} x| \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow |\operatorname{arctg} x| \leq |\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x| \leq 2|\operatorname{arctg} x|$. Protože $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ a $\operatorname{arctg} x$ je rostoucí, lichá a spojitá funkce, je podmínka $|\operatorname{arctg} x| \leq \frac{\pi}{3}$ ekvivalentní s $x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle$. K funkci $\operatorname{arctg} x$ je (na celém $\mathbb{R}$) inverzní funkce $\operatorname{tg} x \restriction \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, proto je $\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x = x$. Po této úpravě můžeme dvojitou nerovnost $|\operatorname{arctg} x| \leq |x| \leq 2|\operatorname{arctg} x|$ rozepsat na dvě nerovnosti a pravou z nich dělit dvěma. Dostaneme výsledné odhady funkce $\operatorname{arctg} x$: pro každé $x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle$ je $\frac{|x|}{2} \leq |\operatorname{arctg} x| \leq |x|$. Provedeme-li popsanou substituci ve zlepšeném horním odhadu funkce $\operatorname{tg} x$ (viz výše), dostaneme zlepšený dolní odhad $\operatorname{arctg} x$.

Naprosto stejným postupem (který z tohoto důvodu ani neuvádíme) dostaneme odhady funkce $\arcsin x$: pro každé $x \in \langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\rangle$ je $|x| \leq |\arcsin x| \leq 2|x|$ s možností zlepšení horního odhadu.

Funkce $\operatorname{arccotg} x$ je inverzní k $\operatorname{cotg} x$ v intervalu $(0, \pi)$, proto se předem omezíme na kladná x. Podmínka $0 < y \leq \frac{\pi}{3}$ (vzniklá konjunkcí podmínky z odhadů $\operatorname{cotg} x$ a podmínkou kladnosti z předchozí věty) po substituci $y = \operatorname{arccotg} x$ dá nerovnosti $0 < \operatorname{arccotg} x \leq \frac{\pi}{3}$, z nichž levá je splněna vždy, pravá pro $x = \operatorname{cotg} \operatorname{arccotg} x \geq \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Změna nerovnosti je samozřejmě důsledkem toho, že funkce $\operatorname{cotg} x$ je na intervalu $(0, \pi)$ klesající. Interval platnosti odhadů pro $\operatorname{arccotg} x$ má tedy zásadně odlišný charakter, než je tomu v ostatních případech. Odvození samotných odhadujících nerovností je opět velice podobné předchozím a přenecháváme jej čtenáři jako cvičení. Výsledek: pro všechna $x \in \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty \right)$ je $\frac{1}{x} \geq \operatorname{arccotg} x \geq \frac{1}{2x}$ s možností zlepšení dolního odhadu.

Posledními dvěma funkcemi, jejichž chování v okolí významných bodů je třeba znát, je e^x a $\ln x$. V prvním případě vyjděme z nerovnosti $1 + x \leq e^x$, která platí na celém $\mathbb{R}$ (algebraicky říká, že graf funkce e^x je všude „nad" grafem jeho tečny v bodě 0) a je horním odhadem. Dosazením $-x$ za x z ní, opět v celém $\mathbb{R}$, dostaneme $1 - x \leq e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ a odtud pro $1 - x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$ (aby se při dělení nerovnosti $1 - x$ nezměnila nerovnost) horní odhad $e^x \leq \frac{1}{1-x}$. Vzhledem k rozdílnosti intervalu pro horní a dolní odhad je v tomto případě neuvádíme v jedné nerovnosti, i když tato nerovnost pro $x \in (-\infty, 1)$ samozřejmě platí.

Funkce $\ln x$ je inverzní k e^x na celém $\mathbb{R}$, proto můžeme opět dostat její odhady substitucí $y = \ln x$ v odhadech funkce e^y. V případě horního odhadu dostaneme pro $x \in \mathbb{R}^+$ nerovnost $1 + \ln x \leq e^{\ln x} = x$, neboli $\ln x \leq x - 1$, což je dolní odhad $\ln x$. Poznamenejme, že ačkoli platí pro všechna kladná x, je podstatný hlavně v okolí bodu 1, často se také uvádí ve tvaru $\forall x \in (-1, \infty) : \ln(1 + x) \leq x$, což je odhad v okolí nuly. Z mezitvaru dolního odhadu funkce e^y máme pro $x \in \mathbb{R}^+$ mezitvar horního odhadu $\ln x$: $1 - \ln x \leq e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$, který snadno převedeme na výsledný $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$. Výhoda použití mezitvaru tkví nejen ve snazší algebraické úpravě, ale hlavně v širším oboru platnosti. Pokud bychom odvozovali z výsledného odhadu e^y, dostali bychom odhad jen pro $x \in (0, e)$ (rozmyslete si). Odhad se opět používá i

2

ve tvaru pro okolí nuly $\forall x \in (-1,\infty) : 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$. V případě logaritmu jsou intervaly odhadů stejné, můžeme je tedy sjednotit do $\forall x \in \mathbb{R}^+ : 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$, resp. $\forall x \in (-1,\infty) : \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$. Odhady e^x a $\ln x$ nelze zlepšit multiplikativní konstantou.

Zapamatovat si výše uvedené odhady v algebraické podobě je značně obtížné. Nejjednodušší je patrně grafická představa: dokážeme-li si představit grafy funkcí $\frac{x}{2}$, x a $2x$ a funkce $\sin x$ a $\operatorname{tg} x$ sevřené mezi prvními, resp. druhými dvěma funkcemi, a víme-li, že v nějakém okolí nuly (bez nuly samotné) platí $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ a že grafy funkcí k sobě inverzních jsou symetrické podle osy prvního a třetího kvadrantu (tedy podle přímky $y = x$), lze odhady goniometrických a cyklometrických funkcí velmi rychle odvodit. Oproti tomu u exponenciály a logaritmu je už obtížnější přesná představa omezujících racionálních funkcí, zatímco algebraické odvození je jednoduché, proto je patrně nejefektivnější graficky si pamatovat odhady přímkou (e^x zdola a $\ln x$ shora) a ostatní odvodit popsaným způsobem.

Ukažme si nyní použití odvozených odhadů na dalších příkladech.

Příklad O. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

1

$$\sum \frac{1}{n \operatorname{arccotg}^2 \sqrt{n}}. \tag{O.1}$$

Řešení. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ spadají hodnoty $\sqrt{n}$ do intervalu $\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty \right)$, pro který známe odhad funkce $\operatorname{arccotg} x$ (stačilo by ovšem, aby tam spadaly pro s.v. n). Protože nevíme, zda budeme potřebovat horní či dolní odhad, použijeme univerzální tvar s oběma odhady. Je tedy $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \operatorname{arccotg} \sqrt{n} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$, z čehož umocněním na druhou (což je zde korektní, protože všechny strany jsou nezáporné) a vynásobením n dostáváme $1 \geq n \operatorname{arccotg}^2 \sqrt{n} \geq \frac{1}{4}$. Máme tedy odhad jmenovatele, převrácením získáme odhad členů řady:

$$1 \leq \frac{1}{n \operatorname{arccotg}^2 \sqrt{n}} \leq 4$$

a vidíme, že potřebujeme pouze odhad zdola (který ovšem vznikl převrácením odhadu $\operatorname{arccotg} \sqrt{n}$ shora), protože řada $\sum 1$ je na první pohled divergentní (její součet je zřejmě ∞, také nesplňuje nutnou podmínku konvergence řady), a tedy podle srovnávacího kritéria diverguje i řada (O.1).

Příklad P. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum \left(n \arcsin \frac{1}{2n} \right)^n. \tag{P.1}$$

Řešení. Členy této řady jsou nezáporné a jejich tvar vybízí k použití odmocninového kritéria, avšak v nelimitní verzi, protože spočíst limitu výrazu

$$\sqrt[n]{\left(n \arcsin \frac{1}{2n} \right)^n} = n \arcsin \frac{1}{2n}$$

je značně obtížné. Právě pro tyto případy však jsou určeny odhady. Posloupnost $\frac{1}{2n}$ má limitu 0 a skoro všechny její členy budou v libovolném intervalu, jehož je 0 vnitřním bodem. Můžeme tedy předpokládat, že $\frac{1}{2n} \in \langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$ a že tudíž

$$\frac{1}{2n} \leq \arcsin \frac{1}{2n} \leq 2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

(absolutní hodnoty vynecháváme, protože všechny výrazy jsou kladné), z čehož po vynásobení n máme

$$\frac{1}{2} \leq n \arcsin \frac{1}{2n} \leq 1.$$

1 Tento odhad však nestačí – abychom mohli říci, že řada podle odmocninového kritéria konverguje, museli bychom dokázat, že její členy jsou menší nebo rovny nějakému $q < 1$. Horní odhad $\arcsin x$ lze ovšem zlepšit, a to tak, že zlepšíme odhad $\sin x$ zdola a pomocí substituce přejdeme k inverzní funkci (viz postup výše).

Pro $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je $|\sin y| \geq |y| \cos y$, stačí tedy odhadnout $\cos y$ zdola větší konstantou než $\frac{1}{2}$, která byla použita v odhadu, který jsme zkoušeli výše. To lze snadno: např. pro $y \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ je $\cos y \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, tedy $|\sin y| \geq \frac{|y|}{\sqrt{2}}$. Substitucí $y = \arcsin x$ dostáváme pro $x \in \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$ odhad $|x| \geq \frac{|\arcsin x|}{\sqrt{2}}$, neboli $|\arcsin x| \leq \sqrt{2}|x|$.

Zopakujeme předchozí postup s novým odhadem (tentokrát už jen shora):

$$\arcsin \frac{1}{2n} \leq \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}n}$$

a po vynásobení n dostáváme

$$n \arcsin \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$$

čímž jsme podle odmocninového kritéria dokázali, že řada absolutně konverguje.

Příklad Q. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

6

$$\sum \frac{(-1)^n n}{n^2 + 2}. \tag{Q.1}$$

Řešení. Jde o typickou alternující řadu (tedy řadu se střídavými znaménky). Speciálně pro tyto řady je určeno Leibnizovo kritérium, které má ovšem nevýhodu: lze pomocí něj zjistit jen neabsolutní konvergenci, divergenci a absolutní konvergenci nikoli. Doporučený postup pro alternující řady je tedy následující: nejprve zkusíme nutnou podmínku konvergence, pokud je splněna, zkoumáme absolutní konvergenci (v případě, že vidíme, že řada absolutně konverguje, můžeme nutnou podmínku přeskočit) a pouze v případě, že řada nekonverguje absolutně, zkoušíme ověřit předpoklady Leibnizova kritérias. Protože jeden je shodný s nutnou podmínkou konvergence a byl již ověřen, dokážeme pouze, že posloupnost absolutních hodnot členů řady je (alespoň od nějakého členu dále) nerostoucí. To provedeme z definice – posloupnost (a_n) je nerostoucí od n_0-tého členu, pokud pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_{n+1} \leq a_n$.

Proveďme nyní doporučený postup pro řadu (Q.1). Označme členy řady (Q.1) a_n. Nutná podmínka konvergence je splněna, protože

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2 + 2} = 0\,.$$

Zkusme tedy absolutní konvergenci. Řada $\sum |a_n|$ splňuje nutnou podmínku konvergence, zároveň však neobsahuje žádný člen rostoucí alespoň jako geometrická posloupnost, proto nemá smysl použití podílového a odmocninového kritéria. Použijeme kritérium srovnávací – (limitně) největší členy v čitateli a jmenovateli budou tvořit čitatel a jmenovatel členů srovnávací řady:

$$b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

a protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 + 2} = 1 \in (0, \infty),$$

a harmonická řada $\sum b_n$ diverguje ($\alpha = 1$, viz výše), diverguje i řada $\sum |a_n|$ a tedy řada (Q.1) nekonverguje absolutně.

(5)

Zkusme tedy aplikovat Leibnizovo kritérium. Zjistíme, zda je posloupnost $(|a_n|)$ nerostoucí. Znamená to řešit nerovnost

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{(n+1)^2+2} &\leq \frac{n}{n^2+2} \\ (n+1)(n^2+2) &\leq n(n^2+2n+3) \\ n^3+n^2+2n+2 &\leq n^3+2n^2+3n \\ 2 &\leq n^2+n \end{aligned}$$

Přesné řešení (tj. nalezení všech n, která takovou nerovnost splňují) by vyžadovalo řešení kvadratické nerovnice, to je však v tomto případě zbytečně složité. Stačí vědět, že výsledná nerovnost (kterou jsme dostali ekvivalentními úpravami nerovnosti původní), je splněna pro s.v. n. To je však snadné – už pro $n = 1$ je nerovnost splněna a pravá strana je jako součet rostoucích posloupností rostoucí, tedy pro všechna $n > 1$ bude nerovnost splněna také. Obecněji lze argumentovat tak, že posloupnost vpravo má limitu ∞, skoro všechny její členy tedy musí být větší než 2. Tím jsme ověřili druhou podmínku Leibnizova kritéria a můžeme říci, že řada (Q.1) neabsolutně konverguje.

(4)

Příklad R. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum \cos(n\pi) \ln \frac{n^2-1}{n^2+1}. \tag{R.1}$$

Řešení. Řada je alternující, protože $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a druhý člen nemění znaménko: pro každé $n > 1$ je $0 < \frac{n^2-1}{n^2+1} < 1$ a tedy $\ln \frac{n^2-1}{n^2+1} < 0$. Označme členy řady (R.1) a_n a protože od nynějška budeme pracovat už jen s jejich absolutními hodnotami (v nutné podmínce, případně absolutní konvergenci a Leibnizově kritériu), poněkud je zjednodušíme:

$$|a_n| = \left|(-1)^n \ln \frac{n^2-1}{n^2+1}\right| = -\ln \frac{n^2-1}{n^2+1} = \ln \frac{n^2+1}{n^2-1}$$

Nutná podmínka konvergence je splněna:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2-1} = 0, \tag{R.2}$$

což plyne ze spojitosti funkce $\ln x$ v bodě 1 nebo také z odhadu $\forall x \in \mathbb{R}^+ : 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ – protože $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1} = 1$, jsou skoro všechny členy posloupnosti $\frac{n^2+1}{n^2-1}$ v intervalu platnosti odhadu, a tedy

$$1 - \frac{1}{\frac{n^2+1}{n^2-1}} = \frac{2}{n^2+1} \leq \ln \frac{n^2+1}{n^2-1} \leq \frac{n^2+1}{n^2-1} - 1 = \frac{2}{n^2-1}.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2-1} = 0,$$

platí podle věty o limitě sevřené posloupnosti („o dvou policajtech") i (R.2). Použitý odhad však nabízí mnohem více, než jen ověření nutné podmínky konvergence. Velmi snadno pomocí něj rozhodneme i další test alternující řady, absolutní konvergenci. Řady $\sum \frac{2}{n^2+1}$ i $\sum \frac{2}{n^2-1}$ lze pomocí limitního srovnávacího kritéria srovnat s řadou $\sum \frac{2}{n^2}$, o které víme, že konverguje (viz příklad L). Proto s ní srovnáme řadu horních odhadů – to nám následně umožní pomocí nelimitní verze srovnávacího kritéria ověřit konvergenci řady $\sum |a_n|$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2-1}}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-1} = 1 \in (0, \infty),$$

(4)

konvergence řad $\sum \frac{2}{n^2-1}$ a $\sum \frac{2}{n^2}$ je tedy ekvivalentní a protože druhá z nich konverguje, konverguje i první. Ta je ovšem konvergentní majorantou řady $\sum |a_n|$, která tudíž také konverguje. To znamená, že řada (R.1) konverguje absolutně a použít Leibnizovo kritérium již není třeba.

7

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\sin \frac{x}{\sqrt{n} \ln n}}_{a_n} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) $x = 0 \rightarrow a_n \equiv 0$ AK

(b) $x > 0 \rightarrow a_n \geq 0$

$$b_n = \left(\frac{x}{\sqrt{n} \ln n} \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x/(\sqrt{n} \ln n))}{x/(\sqrt{n} \ln n)} = 1$$

Heine $\quad \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$

$$x_n = \frac{x}{\sqrt{n} \ln n} \qquad x_n \to 0 \qquad x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

tedy $\sum a_n$ K $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ K

$\sum \frac{x}{\sqrt{n} \ln n}$ D ze škály $\sum n^{\alpha} \ln^{\beta} n$

tedy $\sum a_n$ D.

(c) $x < 0$ budeme zkoumat $\sum -(a_n)$. Analogicky

(8) $\sum \underbrace{\sin^2 \frac{x}{\sqrt{n}\ln n}}_{a_n \geq 0}$, $x \in \mathbb{R}$

(a) $x = 0 \to a_n = 0$ $\quad \sum$ AK

(b) $x \neq 0$

$$b_n = \frac{x^2}{(\sqrt{n}\ln n)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \underset{\text{Heine}}{\overset{\uparrow}{=}} 1$$

$$x_n = \frac{x^2}{n \ln^2 n} \qquad x_n \to 0 \quad x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin^2 y}{y^2} = 1$$

tedy $\quad \sum a_n$ K $\iff \sum \frac{x^2}{n \ln^2 n}$ K (víme ze školy)

závěr $\sum a_n$ K (a to absolutně)

(9)

$a_n := f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, je tedy rostoucí a snadno se spočte $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{e^n - 1}{e^n + 1}\right) \cdot \cos n \text{ konverguje.} \tag{1}$$

- Posloupnost $\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a omezená (monotonii lze opět dostat například zderivováním příslušné funkce, omezenost plyne z toho, že posloupnost má vlastní limitu – jakou?). Podle Abelova kritéria a (1) tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right) \cdot \log\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right) \cdot \cos n \text{ konverguje.} \tag{2}$$

Poznámka. Řada dokonce konverguje absolutně, což byl jiný (otázkou je, jestli jednodušší) způsob, jak zjistit její konvergenci. Pro všechna $n \in \mathbf{N}$ totiž platí:

$$\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right) \cdot \log\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right) \cdot \cos n\right| \le \frac{\pi}{2}\left|\log\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right)\right| = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{e^n+1}{e^n-1}\right) \tag{3}$$

a dále

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{e^n+1}{e^n-1}\right)}{\frac{2}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{2}{e^n-1}\right)}{\frac{2}{e^n-1}} \cdot \frac{\frac{2}{e^n-1}}{\frac{2}{e^n}} = 1 \tag{4}$$

(spočtěte pečlivě). Použijte dále skutečnost, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n}$ konverguje (například podle podílového kritéria). Výsledek pak dá limitní srovnávací a srovnávací kritérium s použitím (3) a (4).

Příklad 3 : Použijeme substituci $e^x = y$, $e^x\,dx = dy$. Dostaneme

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{(e^x+2)^2(e^x+1)^2}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{y^2}{(y+2)^2(y+1)^2}\,dy\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{y^2}{(y+2)^2(y+1)^2} = \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{4}{y+2} + \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{4}{y+1}.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{4}{y+2} + 4\log(y+2) - \frac{1}{y+1} - 4\log(y+1)\right]_0^{\infty} \\ &= \left[-\frac{4}{y+2} - \frac{1}{y+1} + 4\log\left(\frac{y+2}{y+1}\right)\right]_0^{\infty} = 3 - 4\log 2. \end{aligned}$$

Příklad 4 : Označíme

$$f(x) = (\arcsin x - x)^{\alpha} \frac{\sin^{\beta}(\pi x)}{(1-x)^{\alpha}}$$

pro $x \in (0,1)$. Funkce f je na intervalu $(0,1)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

10

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3}\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n,$$
kde $\log x\ (= \ln x)$ je přirozený logaritmus (logaritmus o základu e). (15 bodů)

Řešení : Položme
$$a_n := \frac{n+1}{n+3}\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n.$$
Protože $\frac{n+3}{n+1} > 1$, je $a_n > 0$. Použijeme odmocninové kritérium:
$$\sqrt[n]{a_n} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n+1}{n+3}}}_{=:b_n}\ \underbrace{\log\frac{n+3}{n+1}}_{=:c_n}.$$
Platí
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \log\frac{n+3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \log\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \log 1 = 0\,,$$
kde jsme využili faktu, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, aritmetiky limit a spojitosti logaritmu v bodě 1. Dále pro každé n přirozené platí $0 < \frac{n+1}{n+3} < 1$, tedy i
$$0 < \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+3}} < 1\,,$$
odkud plyne, že posloupnost b_n je omezená[2]. Podle věty, že limita součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule, je nula, tedy máme
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0\,,$$
což podle limitního odmocninového kritéria znamená, že zadaná řada konverguje.

Poznámka: Jinou možností bylo nejprve použít (limitního) srovnávacího kritéria, tj. buď si uvědomit, že pro všechna přirozená n platí
$$0 < \frac{n+1}{n+3}\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n < \left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n,$$
nebo že platí
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n+3}\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n}{\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n} = 1\,.$$
Ať již použijeme jeden či druhý argument, vidíme, že konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n$ implikuje konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+3}\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n$. Konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n$ však dostaneme z odmocninového kritéria, jako výše.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:
- aplikace odmocninového kritéria .... 3 body
- $a_n > 0$, aritmetika limit .... 2 + 2body
- výpočet limity logaritmu .... 4 bodů
- výpočet limity n-té odmocniny .... 4 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:
- odůvodnění výpočtu limity (omezená krát posloupnost s nulovou limitou) .... 4 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

[2] Samozřejmě je také možno spočítat limitu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ například rozpisem obecné mocniny na exponencielu a logaritmus, a obdržíme také $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 0$.

(11)

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{(n+2)!+2}.$$

(15 bodů)

Řešení : Použijeme limitní srovnávací kritérium, členy vyšetřované řady budeme srovnávat s $\frac{1}{n^2}$. Pro velká n se totiž

$$a_n := \frac{n!+1}{(n+2)!+2} \quad \text{„chová jako“} \quad \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \quad \text{což se „chová jako“} \quad \frac{1}{n^2} =: b_n\,.$$

Nyní je potřeba tento náš odhad odůvodnit. Počítejme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!+1)\,n^2}{(n+2)!+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n!}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n^2\cdot n!}} = 1\,, \tag{1}$$

s využitím faktu, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$ a podle věty o aritmetice limit.

Protože limita v (1) je vlastní a nenulová, a protože obě srovnávané řady jsou řady s kladnými členy, konverguje námi vyšetřovaná řada právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tato řada však konverguje podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Závěr: námi vyšetřovaná řada tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- odhad s jakou řadou srovnat .... 5 bodů
- číselný výpočet limity v (1) .... 5 bodů
- závěr .... 5 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ apod. .... 1 bod
- aritmetika limit .... 1 bod
- limitní srovnání: řady s nezápornými členy, limita vlastní a nenulová .... 1 bod
- uvedení, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$ .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

(12)

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}{\binom{n}{4}+\binom{n}{5}},$$

kde $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo „n nad k“. (15 bodů)

Řešení :

Položme

$$a_n := \frac{\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}{\binom{n}{4}+\binom{n}{5}}.$$

Úpravou čitatele i jmenovatele tohoto zlomku použitím vzorce $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ dostaneme

$$a_n = \frac{\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}} = \frac{60+20(n-2)}{5(n-2)(n-3)+(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{20}{(n-2)(n-3)}.$$

Použijeme limitní srovnávací kritérium. Za tím účelem nejprve odhadneme, jak se a_n chová pro velké hodnoty n. „Tipneme si“, že pro dostatečně velká n je možno zanedbat aditivní konstanty $(\cdots-2)$, $(\cdots-3)$ ve výrazech výše,

$$a_n \text{ se tedy „chová jako“ } \frac{1}{n^2}.$$

Označme tedy $b_n := \frac{1}{n^2}$. Lze ihned konstatovat, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje} \tag{6}$$

podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

To, že se řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ „chovají stejně“, je ale nutné přesně ověřit:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{20n^2}{(n-2)(n-3)} = \frac{20}{\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}.$$

Odtud ihned dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 20, \tag{7}$$

protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ pro $\beta > 0$.

Obě řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ mají nezáporné členy, limita v (7) je vlastní a nenulová, plyne tedy z (6) podle limitního srovnávacího kritéria, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava a_n .... 4 body
- určení b_n a spočtení (7) .... 5 bodů
- odůvodnění: zmínka, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$ .... 1 bod
- odůvodnění: zmínka, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ pro $\beta > 0$ .... 1 bod
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje .... 1 bod
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: (7) je vlastní a nenulová .... 2 body
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: jde o řady s nezápornými členy 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

(13)

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{n^2},$$

kde symbolem log značíme přirozený logaritmus, tedy logaritmus o základu e. (15 bodů)

Řešení : Položíme $a_n := \left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{n^2}$. Protože platí $\lim_{n\to\infty}\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)=1$, je určitě $a_n \geq 0$ pro všechna dostatečně velká přirozená[1] n, a můžeme proto použít (limitní) odmocninové kritérium.

Platí:

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{n}=e^{n\log\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)}=:e^{A_n}.$$

Dále je

$$A_n=n\log\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)=\underbrace{n}_{P_n}\cdot\underbrace{\frac{\log\left(1-\log\frac{n+1}{n}\right)}{-\log\frac{n+1}{n}}}_{Q_n}\cdot\underbrace{\frac{-\log\frac{n+1}{n}}{-\left(\frac{n+1}{n}-1\right)}}_{R_n}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{n+1}{n}\right)}_{S_n}.$$

Všimněte si, jakých úprav používáme, abychom co nejvíce při výpočtu $\lim_{n\to\infty}A_n$ využili základních limit pro logaritmus. Dále už je výpočet jednoduchý, i když jeho správné odůvodnění v sobě skýtá jisté možnosti nečekaných bodových ztrát:

$$\lim_{n\to\infty}P_n\cdot S_n=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}(-1)=-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}Q_n=1 \quad \text{(základní limita pro logaritmus a využití Heineho věty s } y_n=-\log\frac{n+1}{n}\text{)},$$

$$\lim_{n\to\infty}R_n=1 \qquad \text{(obdobné odůvodnění jako pro } Q_n\text{)}.$$

Celkově tedy je podle věty o aritmetice limit

$$\lim_{n\to\infty}A_n=-1, \qquad \text{a proto} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Protože $1/e<1$, plyne z limitního odmocninového kritéria, že námi vyšetřovaná řada konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- $a_n \geq 0$ .... 2 body
- výpočet Q_n .... 4 body
- výpočet R_n .... 3 body
- $\lim_{n\to\infty}A_n=-1$ .... 2 body
- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{-1}$ .... 1 bod
- závěr, že řada konverguje dle odm. kritéria .... 3 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění limity složené funkce .... 2 body
- aritmetika limit .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

[1] Dá se dokonce jednoduše spočíst, že $\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)\geq 0$ a tedy i $a_n\geq 0$ pro všechna přirozená n, není to však nutné: odmocninové kritérium potřebuje pouze, aby existovalo přirozené n_0, že $a_n\geq 0$ pro všechna přirozená $n\geq n_0$.

(14)

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right).$$
(15 bodů)

Řešení : Položme
$$x_n := \frac{1+2^n}{3^n}, \qquad y_n := \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}. \tag{6}$$
Není těžké odhadnout, že x_n „se chová pro velká n jako“ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, a také, že $y_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}$ „se chová pro velká n jako“ $\frac{1}{n^{1/4+1/2}} = \frac{1}{n^{3/4}}$.

Přesněji, pro x_n máme
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n}{3^n}\cdot\frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}+1\right) = 1\,, \tag{7}$$
zatímco pro y_n máme
$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{\frac{1}{n^{1/4+1/2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}\,. \tag{8}$$
Ve výpočtech používáme věty o aritmetice limit, skutečnosti, že $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konverguje (buď podle odmocninového kritéria nebo konstatováním faktu, že jde o geometrickou řadu s kvocientem $\frac{2}{3}$), dále pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$ diverguje (s využitím znalosti, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\gamma}$ konveguje právě tehdy, když $\gamma > 1$), a konečně protože členy všech čtyř řad v (7), (8) jsou nezáporné, dostaneme dvojím použitím limitního srovnávacího kritéria, že
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n} \quad \text{konverguje, zatímco} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \quad \text{diverguje.}$$
První možnost zakončení: Z výše uvedeného již plyne, že řada
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right) \quad \text{diverguje,}$$
neboť kdyby tato řada konvergovala, musela by (protože rozdíl dvou konvergenvních řad je konvergentní řada) konvergovat i řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right)-\left(\frac{1+2^n}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$, což není pravda.

Druhá možnost zakončení: Pro všechna přirozená n platí $\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} > \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$ a protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right)$ diverguje, diverguje podle srovnávacího kritéria i řada, kterou jsme měli vyšetřit.

Bodování při použití prvního postupu při výpočtu (při druhém budou body přerozděleny):

- konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ .... 5 bodů
- divergence $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ .... 6 bodů
- divergence $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ .... 4 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konverguje a proč .... 1+1 bod
- odůvodnění: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$ diverguje a proč .... 1+1 bod
- odůvodnění: zmínky, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\beta} = 0$ pro $\beta > 0$ .... 1 bod
- odůvodnění užití limit. srov. krit.: limity (7), (8) jsou vlastní a nenulové ..... 1 bod
- odůvodnění užití limit. srov. krit.: jde o řady s nezápornými členy .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

(15)

$\sum \left(\cos \frac{a}{n}\right)^n \qquad a \in \mathbb{R}$

- $a \neq 0$

$\lim a_n = 1$

Heine $x_n = n$, $x_n \to \infty$, $x_n \neq \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos \frac{a}{x}\right)^x = \lim e^{x \ln\left(\cos \frac{a}{x}\right)}$

$$\lim_{x\to\infty} x \ln \cos \frac{a}{x} = \lim_{x\to\infty} x \frac{\ln\left(\cos \frac{a}{x}\right)}{\left(\cos \frac{a}{x}\right) - 1} \cdot \left(\cos \frac{a}{x} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\ln\left(\cos \frac{a}{x}\right)}{\cos \frac{a}{x} - 1}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos \frac{a}{x}}{\frac{a^2}{x^2}}}_{\downarrow\, 1/2} \cdot \underbrace{\frac{a^2}{x^2} \cdot (-x)}_{\downarrow\, 0} \stackrel{\text{VOTL}}{=} 0$$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a}{x} = 0$

(S) cos spoj v 0

$\lim\limits_{y\to 0} \cos y = 1$

- $\lim\limits_{z\to 1} \frac{\ln z}{z-1} = 1$ (P) $\cos y \neq 1$ na $P^{\pi/8}(0)$

- $\lim\limits_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}$ (P) $\frac{a}{x} \neq 0$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

- $\lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$ (S) e^u spoj v 0

- $a = 0 \qquad a_n \equiv 1$

Závěr $\sum$ div., nesplňuje NP konvergence

16.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p + 1}{n^q + n^2 - 3}$$

Řešení:

Pokud $p < 0$, potom $n^p \leq 1$ a řada konverguje pro všechny hodnoty $q \in \mathbb{R}$ podle srovnání

$$\frac{n^p + 1}{n^q + n^2 - 3} \leq \frac{2}{n^2 - 3}.$$

Pokud $0 < p < 1$, pak řada opět konverguje pro všechna $q \in \mathbb{R}$, neboť $2 - p > 1$ a

$$\frac{n^p + 1}{n^q + n^2 - 3} = \frac{1 + 1/n^p}{n^{q-p} + n^{2-p} - 3n^{-p}} \leq \frac{2}{n^{2-p} - 3}.$$

Pokud $p \geq 1$, potom řada konverguje tehdy a jen tehdy, je-li $q - p > 1$. Je-li tato podmínka splněna, plyne konvergence řady ze srovnání

$$\frac{n^p + 1}{n^q + n^2 - 3} = \frac{1 + 1/n^p}{n^{q-p} + n^{2-p} - 3n^{-p}} \leq \frac{2}{n^{q-p} - 3}.$$

Není-li podmínka splněna, tj. je-li $p \geq 1$ a zároveň $q - p \leq 1$, pak divergence řady plyne ze srovnání

$$\frac{n^p + 1}{n^q + n^2 - 3} = \frac{1 + 1/n^p}{n^{q-p} + n^{2-p} - 3n^{-p}} \geq \frac{1}{n^{q-p} + n^{2-p} - 3n^{-p}} = \frac{1}{n} \frac{1}{n^{q-p-1} + n^{1-p}(1 - 3/n^2)} \geq \frac{1}{n}$$

od jistého vhodného n počínaje, neboť ve druhém zlomku jsou ve jmenovateli nekladné mocniny.

17.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1 + x^{2k}}$$

Řešení:

Pokud $x = 0$, řada konverguje absolutně (je triviální). Odhad (zapomenutí členu x^{2k} ve jmenovateli)

$$\left| \frac{x^k}{1 + x^{2k}} \right| \leq |x|^k$$

dává, že pro $|x| < 1$ řada konverguje absolutně srovnáním s geometrickou řadou.

Pokud $x = \pm 1$, řada konvergovat nemůže, neboť $a_k = \frac{(\pm 1)^k}{1 + (\pm 1)^{2k}} = \frac{(\pm 1)^k}{2} \not\to 0$.

Nechť nyní $|x| > 1$. Potom odhad (zapomenutí jedničky ve jmenovateli)

$$\left| \frac{x^k}{1 + x^{2k}} \right| \leq \left| \frac{x^k}{x^{2k}} \right| = \frac{1}{|x|^k}$$

dává, že řada konverguje absolutně srovnáním s geometrickou řadou.

[Pro $x \neq \pm 1$ konverguje absolutně, pro $x = \pm 1$ nekonverguje.]

18.
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

Řešení:

Pro $|x|<1$ konverguje absolutně podle odhadu
$$\left|(-1)^k\frac{x^k}{k}\right|\le |x|^k.$$

Pro $x=1$ konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria, protože $\frac{1}{k}\searrow 0$. Absolutně nekonverguje, neboť řada $\frac{1}{k}$ není konvergentní.

Pro $x=-1$ řada nekonverguje, neboť $(-1)^{k+1}\frac{(-1)^k}{k}=\frac{(-1)^{2k+1}}{k}=-\frac{1}{k}$.

Pokud $|x|>1$, řada nekonverguje, neboť $\lim|a_k|=+\infty$.

19.
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Řešení:

Pro $|x|<1$ je řada konvergentní absolutně podle srovnávacího kritéria a odhadu
$$\left|(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right|\le |x|^{2k+1}.$$

Pro $x=1$ je řada konvergentní neabsolutně podle Leibnizova kritéria, neboť $\frac{1}{2k+1}\searrow 0$.

Pro $x=-1$ je $(-1)^k(-1)^{2k+1}\frac{1}{2k+1}=\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ a řada konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria.

Pro $|x|>1$ řada nekonverguje, neboť $\lim|a_k|=+\infty$.

20.
$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos(k^2\pi)\left(\sqrt{k+9}-\sqrt{k}\right)$$

Řešení:

Platí, že k^2 je liché, právě když k je liché. Proto
$$\cos(k^2\pi)=\cos(k\pi)=(-1)^k.$$

Dále je
$$\sqrt{k+9}-\sqrt{k}=\frac{9}{\sqrt{k+9}+\sqrt{k}}\ge\frac{9}{\sqrt{k}}.$$

Z těchto výpočtů je zřejmé, že řada absolutně konvergovat nemůže (řada $\frac{9}{\sqrt{k}}$ není konvergentní), ale konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria.

21.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$$

Řešení: Použijeme d'Alambertovo kritérim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^\alpha}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \cdot (n+1)^{\alpha-2},$$

což pro $\alpha = 2$ vyjde $1/4$, pro $\alpha < 2$ je to 0 a pro $\alpha > 2$ vyjde ∞. Tedy řada konverguje absolutně pro $\alpha \leq 2$ a diverguje pro $\alpha > 2$.

22. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}} - 1 \right)$.

[Konverguje absolutně.]

Návod: Neabsolutní konvergence je zřejmá z faktu, že

$$\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}} = \sqrt[k]{1 - \frac{1}{k^2+1}} \nearrow 1.$$

Co se týče absolutní konvergence, všimněte si nejprve, že

$$\left| (-1)^k \left(\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}} - 1 \right) \right| = 1 - \sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}}.$$

Známé aproximační vzorce nám pomohou získat vhled:

$$1 - \sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{k^2+1}\right)^{1/k} \approx 1 - 1 + \frac{1}{k(k^2+1)} \approx \frac{1}{k^3}.$$

Řada by tedy měla být absolutně konvergentní. Pro důkaz by se mělo hodit použít srovnávací limitní kritérium a spočítat třeba limitu (což vyžaduje trochu šikovnosti)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1 - \sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}}}{\frac{1}{k^3}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1 - \exp\left[\frac{1}{k} \ln \frac{k^2}{k^2+1}\right]}{\frac{1}{k^3}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1 - \exp\left[\frac{1}{k} \ln \frac{k^2}{k^2+1}\right]}{\frac{1}{k} \ln \frac{k^2}{k^2+1}} \frac{\ln \frac{k^2}{k^2+1}}{\frac{1}{k^2}} =$$

Substituce $y = \frac{1}{k} \ln \frac{k^2}{k^2+1}$:

$$= \lim_{y\to 0-} \frac{1 - e^y}{y} \cdot \lim_{k\to\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2+1}\right)^{k^2} = -1 \cdot \ln(1/e) = 1.$$

Řada se tedy chová doopravdy jako $\frac{1}{k^3}$ a proto je absolutně konvergentní.