9. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/

1. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Řešení: Užijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2\cdot 2^n}\frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

$1/2 < 1$, tedy řada konverguje.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n}+3^{2n}}$$

Řešení: Použijeme odmocninové kritérium

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6^n}{2^{2n}+3^{2n}}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt[n]{4^n+9^n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt[n]{9^n}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} < 1,$$

tedy řada konverguje.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$$

Řešení: Otestujeme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}-1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} - \lim_{n\to\infty} 1 = 1-1 = 0.$$

Je vidět, že posloupnost je neklesající, tedy z Leibnize řada konverguje.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

Řešení:

Otestujeme nejprve nutnou podmínku konvergence. Použijeme větu a převedeme n-tou odmocninu na podíl

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

tedy řada diverguje.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

Řešení: Použijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0.$$

Řada konverguje.

(f)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^k}{7}\right)^k$$

Použijeme zobecněné odmocninové kritérium. Je

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{2+(-1)^k}{7}\right)^k} = \limsup_{k\to\infty} \frac{2+(-1)^k}{7} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{3}{7} = \frac{3}{7} < 1,$$

(dokonce rovnost), řada tedy konverguje. Limes superior je nutno použít, protože limita by neexistovala, zato limes superior existovat musí.

(g)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k}$$

Řešení: Řada konverguje podle Leibnizova kritéria, neboť $\frac{1}{\ln k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Posloupnost $\frac{1}{\ln k}$ je zjevně nerostoucí.

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$$

Řešení: $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ Podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!n!n!5^n}{(n+1)!(n+1)!(2n)!5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \frac{1}{5} = 4 \cdot \frac{1}{5} < 1.$$

Tedy řada konverguje.

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}$$

Řešení: Řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2} = \frac{2}{3} \neq 0,$$

tedy řada diverguje.

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n} \right)^n$$

Řešení: Odmocninové kritérium, verze (a).

$$\left| \frac{1+\cos n}{2+\cos n} \right| \leq \frac{2}{3}$$

Tuto nerovnost ověřte! Našli jsme $q < 1$, které omezuje posloupnost a_n $\forall n$, tedy řada konverguje.

(k)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$$

Řešení:

Použijeme odmocninové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)^{n+1-2} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

tedy řada konverguje.

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

Řešení:

Řada nekonverguje, neboť

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

(m)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{(n-1)n(n+1)}$$

Řešení: Použijeme odmocninové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{(n-1)n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n^2} \right)^{n^2-1}$$

$$\overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n^2} \right)^{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n^2} \right)^{-1} = \frac{1}{e} \cdot 1 < 1,$$

tedy řada konverguje.

2. Vyšetřete konvergenci následujících řad, $x \in \mathbb{R}$:

   (a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

   Řešení: Pro $|z| < 1$ konverguje absolutně podle limitního podílového kritéria, neboť
$$\lim \frac{\frac{|(-1)^{n+2}|\,|z|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|(-1)^{n+1}|\,|z|^{n}}{n}} = \lim \frac{|z|}{1} \frac{n}{n+1} = |z| < 1.$$

   Pro $|z| > 1$ diverguje, neboť limita koeficientů buď neexistuje nebo není nulová.

   Pro $z = 1$ řada konverguje podle Leibnizova kritéria (neabsolutně), neboť posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je monotónní a konverguje k nule.

   Pro $z = -1$ řada diverguje, neboť $\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = -1/n$ a řada $\sum -\frac{1}{n}$ je harmonická s minusem.

   (b)
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$$

   Řešení:

   Pro $|x| < 1$ konverguje absolutně podle podílového kritéria, neboť
$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4 \cdot |x|^{k+1}}{k^4 \cdot |x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4}{k^4} \cdot |x| = |x| < 1.$$

   Pokud $|x| \geq 1$, nekonverguje, neboť $\lim k^4|x|^k = +\infty$, a proto není možné, aby $\lim k^4 x^k = 0$.

3. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jsou divergentní. Rozhodněte, zda platí:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ je konvergentní. NE

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n + d_n$ je divergentní. NE

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$ je konvergentní. ANO

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n + l \cdot b_n$, kde $k, l \in \mathbb{R}$ je konvergentní. ANO

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ je konvergentní. NE

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$ je konvergentní. NE

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot d_n$ je konvergentní. NE

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1} z^n \qquad z \in \mathbb{R}$

d'Al pro $z \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1} \cdot z^{n+1}\right|}{\left|\frac{2^n}{2^n+1} z^n\right|} = \lim_{n\to\infty} |z| \cdot \frac{2 \cdot 2^n}{2^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} |z| \frac{1}{1+\frac{1}{2^{n+1}}} = |z|$$

Tedy pro $|z| < 1 \quad z \neq 0 \qquad \sum AK \quad z$ d'Al

$z = 0 \qquad \sum AK$ automaticky

$|z| > 1 \qquad \sum D$

$z = 1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1}$ diverguje, neb nesplňuje NP

$z = -1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^n+1}$ diverguje, — II —

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}}\right)^{n^{3/2}}$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}\right)^{x^{3/2}} = \lim_{x\to\infty} e^{x^{3/2} \ln\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}\right)} \overset{\uparrow}{\underset{(1)\ \text{VOLSF}}{"="}} e^{\infty} = \infty \neq 0$$

$\Rightarrow$ Div z NP

Heine
$x_n = n$
$x_n \to \infty$
$x_n \neq \infty \ \forall n$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x} \cdot \ln\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}\right)}{\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} - 1} \cdot \left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} - 1\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}_{\to 1 \ (2)\ \text{VOLSF}} \cdot \underbrace{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\to 1/2} \cdot \underbrace{x}_{\to\infty} \overset{\text{VOAL}}{=} \infty$$

(1) $f(y) = e^y \qquad \lim_{y\to\infty} f(y) = \infty$

$g(x) = x^{3/2} \ln\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ (P)

(2) $f(y) = \frac{\ln y}{y-1} \qquad \lim_{y\to 1} f(y) = 1$

$g(x) = \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = 1$ (P)

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$

d' Al

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^{n+1} \frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}\right|}{\left|(-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{100}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

tedy řada AK

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}$

Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n^2/n}}{(n+1)^{(n^2+1)/n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n)^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{1}{(n+1)^{1/n}} \overset{lott}{=} \frac{1}{e} \cdot 1 < 1$$

$\downarrow$

konvergujó

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\to e}} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{2n}}}_{\to 1} \leq \qquad \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$$

2 policajti

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(2^{2^n}+1)}{\ln(2^{4^n}+1)}$

d'Ae

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\ln(2^{2^{n+1}}+1)}{\ln(2^{4^{n+1}}+1)}}{\dfrac{\ln(2^{2^n}+1)}{\ln(2^{4^n}+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^{2^{n+1}}+1)}{\ln(2^{2^n}+1)} \cdot \frac{\ln(2^{4^n}+1)}{\ln(2^{4^{n+1}}+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(2^{2^{n+1}}\left(\frac{1}{2^{2^{n+1}}}+1\right)\right)}{\ln\left(2^{2^n}\left(\frac{1}{2^{2^n}}+1\right)\right)} \cdot \frac{\ln\left(2^{4^n}\left(\frac{1}{2^{4^n}}+1\right)\right)}{\ln\left(2^{4^{n+1}}\left(\frac{1}{2^{4^{n+1}}}+1\right)\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)}{2^n \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)} \cdot \frac{4^n \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2^{4^n}}\right)}{4^{n+1}\ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2^{4^{n+1}}}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln 2 + \overbrace{\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)}{2^n}}^{\to 0}}{\ln 2 + \underbrace{\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{2^n}}_{\to 0}} \cdot \frac{\ln 2 + \overbrace{\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{4^n}}\right)}{4^n}}^{\to 0}}{4\ln 2 + \underbrace{\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{4^{n+1}}}\right)}{4^n}}_{\to 0}}$$

VOAL

$$= \frac{2\ln 2 + 0}{\ln 2 + 0} \cdot \frac{\ln 2 + 0}{4\ln 2 + 0} = \frac{1}{2} < 1$$

Σ konvergujе