4. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Heineho)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na prstencovém okolí bodu c. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

1. Platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$.
2. Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in D(f)$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Věta 2. Nechť $\{a_n\}$ je reálná posloupnost, jejíž všechny členy jsou **kladné**. Nechť dále platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Potom platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Fakta

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n}+3^{2n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^k}{7}\right)^k$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)}$

2. Vyšetřete konvergenci následujících řad, $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$

Bonus

3. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jsou divergentní. Rozhodněte, zda musí platit:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ je konvergentní.
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n + d_n$ je divergentní.
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$ je konvergentní.
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n + l \cdot b_n$, kde $k, l \in \mathbb{R}$, je konvergentní.
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ je konvergentní.
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$ je konvergentní.
   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot d_n$ je konvergentní.

Zkouškové příklady

4. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1} z^n, \qquad z \in \mathbb{R}.$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(2^{2^n}+1)}{\ln(2^{4^n}+1)}$

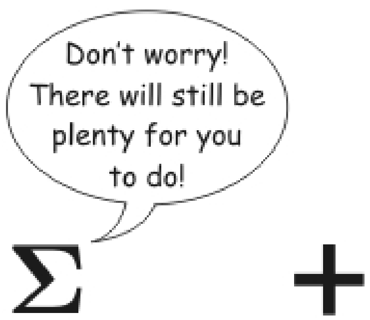

Figure 1: https://mathjokes4mathyfolks.wordpress.com/2010/09/09/a-nice-and-funny-note/