3. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

   Řešení: Nejjednodušší je provést dvakrát l'Hopitalovo pravidlo. Nicméně Taylorův rozvoj je také rychlý.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

   Řešení: Sledujte výpočet.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - x - x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$

   Řešení: Sledujte výpočet.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{4} + o(x^5))}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4!} - \frac{1}{4}\frac{1}{2!} + o(x) = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + 0 = -\frac{1}{12}.$$

   (d) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

   Řešení: Převedeme na společný jmenovatel a rozvineme funkci sinus v čitateli a uvidíme.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x^3/3! + o(x^4) - x}{x\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x}{\sin x}\frac{x}{3!} + \frac{x^2}{x\sin x} o(x^2) \right) = -1\cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0.$$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$

Řešení: Čitatel musíme rozvést do pátého řádu. Platí, že

$$\sin(\sin x) = \sin(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)) =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^5 + o(x^6) =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) - \frac{1}{3!}\left(x^3 - 3x^2\frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{10}x^5 + o(x^6)$$

Odtud vyplývá

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{10}x^5 + o(x^6) - x(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^6))}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{+\frac{1}{10}x^5 + o(x^6) + \frac{1}{9}x^5 + o(x^6)}{x^5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{9} = \frac{19}{90}.$$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{\arctan^3 x}$

Řešení: Předně provedeme jednoduchý trik. Platí, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan x} = 1$$

(jak plyne například ihned z l'Hopitalova pravidla). Proto, pokud existuje limita napravo, platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{\arctan^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\arctan^3 x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3}.$$

Nyní zkusíme rozvinout čitatel do třetího řádu. Dostaneme

$$e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x = 1 + (x^2+x) + \frac{(x^2+x)^2}{2!} + \frac{(x^2+x)^3}{3!} - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + 3\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) - 4 + o(x^3) =$$

$$= 2\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

Hledaná limita je tedy rovna

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{x^3} = \frac{4}{3}.$$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x}$

Řešení: Podle základních limit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

můžeme ihned psát (existuje-li limita napravo), že

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{\left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right)^2 \frac{\sin^4 x}{x^4}} \cdot \frac{1}{x^8} = \lim_{x\to 0} 4 \cdot \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{x^8} =$$

A nyní rozveďme čitatel.

$$e^{x^2} - 1 = 1 + x^2 - 1 + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$\sin x - x = x - \frac{x^3}{6} - x + o(x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \implies (\sin x - x)^2 = \frac{x^6}{36} + o(x^6)$$

a dohromady dostaneme

$$(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2 = \frac{x^8}{36} + o(x^8)$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{x\to 0} 4 \cdot \frac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{x^8} = \lim_{x\to 0} 4 \cdot \frac{\frac{1}{36}x^8 + o(x^8)}{x^8} = \frac{1}{9}.$$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$, $a > 0$

Řešení: Protože platí $a^x = e^{x \ln a}$, je

$$a^x = e^{x\ln a} = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2)$$

$$a^{-x} = e^{-x\ln a} = 1 - x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2)$$

a dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x\ln a + \frac{x^2}{2!}\ln^2 a + 1 - x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a - 2 + o(x^2)}{x^2} = \ln^2 a.$$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$

Řešení: Funkci kotangens napíšeme ve tvaru podílu, převedeme na společný jmenovatel a zkusíme nějaký rozvoj.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} =$$

Jmenovatel se chová jako $x^2 \sin x \approx x^3$, takže zkusíme čitatel rozvést do třetího řádu.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)) - x(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3))}{x^2 \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x + \frac{x^3}{2!} + o(x^4)}{x^2 \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3} \frac{x}{\sin x} + \frac{x}{\sin x} o(x) \right) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\ x - x}{x - \sin x}$

Řešení:

Jde okamžitě pomocí l'Hopitalova pravidla. Taylor ale také ihned dává

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\ x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3/6 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \frac{1 + 3 \cdot \frac{o(x^3)}{x^3}}{1 + 6 \cdot \frac{o(x^3}{x^3}} = 2 \cdot \frac{1 + 3 \cdot 0}{1 + 6 \cdot 0} = 2.$$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\sin x - \mathrm{tg}\ x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2}$

Řešení:

Protože

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(-x^2) - 1}{(-x^2)} = 1,$$

platí rovnost (existuje-li limita napravo)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \mathrm{tg}\ x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \mathrm{tg}\ x) + x^3}{x \cdot (-x^2)^2} =$$

což, rozvineme-li čitatel do pátého řádu, dává

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - (x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5)) + x^3 + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4}x^5 + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{4}.$$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin\ x - \mathrm{tg}\ x - x}{2 \sin x - \arctan\ x - x}$

Řešení: Například z definice Taylorova polynomu můžeme odvodit, že platí

$$\arcsin\ x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\arctan\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

Odtud dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2\sin x - \arctan x - x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5\right)-\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)-x+o(x^6)}{2\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)-x+o(x^6)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{20}x^5-\frac{2}{15}x^5+o(x^5)}{\frac{1}{60}x^5-\frac{1}{5}x^5+o(x^5)} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{-11}{60}} = -\frac{1}{11}.$$

(m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

Řešení: Čitatel musíme rozvést do třetího řádu. Platí, že

$$(\cos x)^{\sin x} = e^{\sin x \ln(\cos x)} = e^{(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3))\cdot(\ln(1-x^2/2+o(x^3))} =$$

$$= e^{(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3))\cdot(-x^2/2+o(x^3))} = e^{-x^3/2+o(x^3)} = 1-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

a tudíž

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^3/2+o(x^3))}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Odhadneme-li první sumu pomocí (6.22) a druhou pomocí (6.19), (6.20) a (6.21), dostaneme

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \varphi'(n^2 x)\right| \\
&< \sum_{n=1}^{n_0-1} 2^{-n} n^k \frac{\varepsilon}{n^k} + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^k 2Cn^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_0-1} 2^{-n} \varepsilon + 2C \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \\
&\leq (1+2C)\varepsilon.
\end{aligned}$$

♣

6.3.3. Příklad. Položme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos(n^2 x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ukažte, že f má derivace všech řádů, avšak její Taylorova řada se středem v bodě 0 diverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Řešení. Funkce kosinus i všechny její derivace jsou omezené funkce. Podle Příkladu 6.3.2 je funkce f dobře definovaná a pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{2k} \cos^{(k)}(n^2 x). \tag{6.23}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $y \in \mathbb{R}$ máme $\cos^{(4k)}(y) = \cos y$, a tedy

$$f^{(4k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{8k}.$$

Nyní dokážeme, že Taylorova řada funkce f nekonverguje v žádném bodě různém od nuly. Vezměme tedy $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Protože $(4k)! \leq (4k)^{4k}$, pro každé $k, m \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{(4k)!} f^{(4k)}(0) x^{4k}\right| &= \frac{1}{(4k)!} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{8k} |x|^{4k} \\
&\geq \frac{1}{(4k)!} 2^{-m} m^{8k} |x|^{4k} \\
&\geq \frac{1}{(4k)^{4k}} 2^{-m} m^{8k} |x|^{4k}.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Vezměme libovolné $k \in \mathbb{N}$ splňující $k^2|x|^2 > 2$ a položme $m = 2k$. Potom z (6.24) dostaneme

$$\left|\frac{1}{(4k)!}f^{(4k)}(0)x^{4k}\right| \geq \frac{1}{(4k)^{4k}}2^{-m}m^{8k}|x|^{4k} = \left(\frac{k^2|x|^2}{2}\right)^{2k} > 1.$$

Taylorova řada funkce f v bodě x se středem v bodě 0 tedy nesplňuje nutnou podmínku konvergence řady, a tudíž podle Věty 3.1.14 diverguje. ♣

6.3.4. Příklad. [1,2] Nechť $\sum a_n$ má kladné členy. Dokažte následující tvrzení.

(a) Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $q \in (1, \infty)$ taková, že

$$n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right) \geq q, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

pak řada $\sum a_n$ konverguje.

(b) Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right) \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

pak řada $\sum a_n$ diverguje.

Řešení. (a) Zvolme $p \in (1, q)$ a položme $b_n = \frac{1}{n(\log n)^p}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Pak

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{(n+1)\log^p(n+1)}{n \log^p n} \\ &= 1 + \frac{(n+1)\log^p(n+1) - n\log^p n}{n \log^p n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.\end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ použijeme Větu 6.1.17 pro funkci $f(x) = x \log^p x$, $x \in (0, \infty)$, a interval $[n, n+1]$ a nalezneme bod $c_n \in (n, n+1)$ splňující

$$f(n+1) = f(n) + f'(n) + \frac{1}{2}f''(c_n).$$

Obdržíme tedy

$$\begin{aligned}&(n+1)\log^p(n+1) - n\log^p n \\ &= \log^p n + p\log^{p-1} n + \frac{p\log^{p-1} c_n + p(p-1)\log^{p-2} c_n}{2c_n}.\end{aligned}$$

Označíme-li

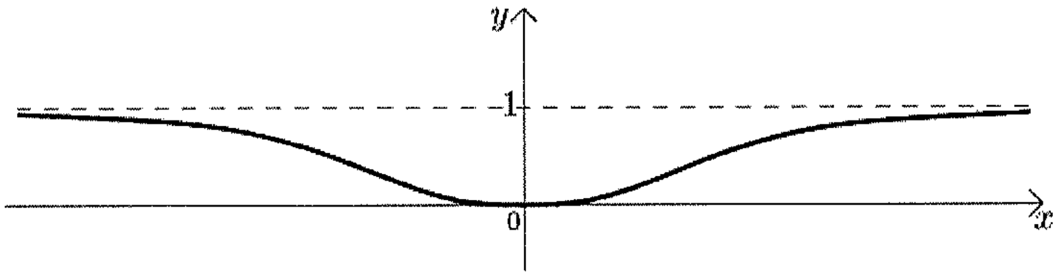
$$\beta_n = \frac{p\log^{p-1} c_n + p(p-1)\log^{p-2} c_n}{2c_n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

[1] de Morgan
[2] Bertrand

Zde prozkoumáme Taylorovy věci pro funkci

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Řekněme si hned zkraje, že tato funkce není ani divná, ani škaredá, je to pěkná funkce. Konec konců, výraz v definici je jen složení eponenciály (nejlepší funkce) a mocniny, na vzorečku e^{-x^2} není nic podezřelého. Protože má limitu 0 v nule, je možné definovat f v 0 tak, aby se stala spojitou. Vypadá takto:



Když se zeptáme na obvyklé vlastnosti, tak zjistíme, že tato funkce má v zásadě všechny, je to skoro nejhezčí možná funkce, protože má všude spojité derivace všech řádů. Protože to ještě bude důležité, tak naše tvrzení dokážeme a dokonce dáme přesnější vyjádření tohoto výsledku.

Tvrzení.
Pro každé přirozené číslo k existuje polynom $P_k(x)$ stupně nanejvýš $2k - 2$ takový, že pro nenulové x máme

$$f^{(k)}(x)=\frac{P_k(x)}{x^{3k}}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Taková tvrzení se obvykle dokazují matematickou indukcí.

$k = 1$: Najdeme obvyklým způsobem první derivaci a jen z zvědavosti i druhou.

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},$$
$$f''(x)=\frac{4-6x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

V obou případech to funguje, vzorec je přesně jak jsme tvrdili.

Teď bychom měli udělat indukční krok. Předpokládejme, že Tvrzení platí pro k, a ukážeme, že pak také musí platit pro $k + 1$.

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= [f^{(k)}(x)]' = \left[\frac{P_k(x)}{x^{3k}}e^{-\frac{1}{x^2}}\right]' \\ &= \frac{P_k'(x)x^{3k} + 2P_k(x)x^{3k-3} - 3kP_k(x)x^{3k-1}}{x^{6k}}e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{P_k'(x)x^3 + 2P_k(x) - 3kP_k(x)x^2}{x^{3k+3}}e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{P_{k+1}(x)}{x^{3(k+1)}}e^{-\frac{1}{x^2}}. \end{aligned}$$

Podle našeho předpokladu je $\mathrm{st}(P_k) \le 2k - 2$, pak $\mathrm{st}(P_k') \le 2k - 3$ a tudíž $\mathrm{st}(P_{k+1}) \le 2k = 2(k+1) - 2$, čímž je důkaz hotov.

Odhad stupně čitatele je důležitý z následujícího důvodu. Nám vlastně stačí vědět, že jeho stupeň je menší než stupeň jmenovatele, takže když ten polynom vydělíme, zůstanou tam jen členy typu $1/x^n$. Proto existuje polynom Q_k takový, že k-tá derivace je rovna $Q_k(1/x)e^{-1/x^2}$. Pomocí tohoto vyjádření dostaneme následující výsledek.

Tvrzení.
Pro každé přirozené číslo k máme

$$\lim_{x\to 0}\big(f^{(k)}(x)\big) = 0.$$

Stačí totiž použít substituci

$$\lim_{x\to 0^+}\big(f^{(k)}(x)\big) = \lim_{x\to 0^+}\big(Q(\tfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}\big) = \left|y = \tfrac{1}{x}\right| = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{Q(y)}{e^{y^2}}\right).$$

Opakované použití l'Hôpitalova pravidla pak dává nulu, viz škála mocnin, podobně vypočítáme limitu zleva. Tato substituce také zjednoduší derivování f, viz Poznámka na konci.

Toto tvrzení ukazuje, že funkce f má také derivace všech řádů v počátku a jsou rovny nule. To znamená, že graf této funkce je v počátku extrémně plochý. Připomeňme, že když chceme najít Taylorův polynom/Taylorovu řadu se středem 0, tak k nalezení koeficientů používáme přesně tyto derivace. Dostaneme proto následující závěr.

Fakt.
Uvažovaná funkce f má Taylorovy polynomy všech stupňů se středem $a = 0$ a Taylororovu řadu se středem $a = 0$ a

$$T_N(x) = 0, \qquad T(x) = 0.$$

Co to znamená? Za prvé, protože daná funkce je mimo počátek nenulová, tak (s výjimkou středu 0) Taylorovy polynomy neaproximují dobře původní funkci

f, vlastně ji neaproximují vůbec. A to navzdory tomu, že f je hladká, s derivacemi všech řádů všude, takže z běžného úhlu pohledu je "pěkná".

Co se týče řady, Taylorovy polynomy konvergují - coby částečné součty této řady - stejnoměrně na celé reálné ose k T. Tato řada je tedy zase nejlepší možná, ale rozhodně se nerovná původní funkci f. Připomeňme, že jsme měli větu, která zaručovala dobrou konvergenci řady v případě, že f má na nějakém okolí stejnoměrně omezené derivace. To zde tedy evidentně neplatí, neexistuje okolí 0, na kterém by derivace byly stejnoměrně omezené.

Toto ukazuje, že problém aproximace funkcí mocninnými řadami může být docela zákeřný i pro pěkné funkce.

Poznámka: Substituce $y = 1/x$ také může pomoci při práci s derivacemi. Nejprve si všimněme, že

$$y' = -1/x^2 = -y^2.$$

Teď jen aplikujeme řetízkové pravidlo a zjistíme, že

$$f'(x) = [e^{-y^2}]' = (-2ye^{-y^2})\cdot y' = 2y^3e^{-y^2}.$$

Podobně

$$f''(x) = [2y^3e^{-y^2}]' = (6y^2 - 4y^4e^{-y^2})\cdot y' = (4y^6-6y^4)e^{-y^2}.$$

Když do toho dosadíme $y = 1/x$, dostaneme přesně ty derivace, které už jsme měli předtím, ale obešli jsme se bez podílového pravidla. Tímto způsobem se také snáze dokáže indukcí, že k-tá derivace je $Q_k(y)e^{-y^2}$ pro nějaký polynom stupně nejvýše $3k$. Rovnou jsme také dostali vzorec, který pomohl při počítání limit.

kde φ je funkce splňující $\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^2}=0$. Položme

$$b_n=\frac{(-1)^n}{n^\alpha},\quad c_n=\frac{1}{2n^{2\alpha}}+\varphi(b_n),\quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Protože $b_n\in(-1,1)$ pro $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, platí

$$\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)=b_n+c_n,\quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Řada $\sum b_n$ konverguje pro každé $\alpha\in(0,\infty)$ podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). Dále díky Větě 4.2.16 platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{\frac{1}{n^{2\alpha}}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\varphi(b_n)}{b_n^2}\right)=1.$$

Tedy dle Věty 3.2.5 a řada $\sum c_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum\frac{1}{n^{2\alpha}}$. To ale nastane právě tehdy, když $\alpha>\frac{1}{2}$ (viz Věta 3.2.18).

Platí tedy $\sum a_n=\sum(b_n+c_n)$, přičež $\sum b_n$ vždy konverguje a $\sum c_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha>\frac{1}{2}$. Řada $\sum a_n$ tedy konverguje právě tehdy, když $\alpha>\frac{1}{2}$.

♣

6.4.12. Příklad. Zjistěte pro která $C\in\mathbb{R}$ má funkce

$$f(x)=\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}+Cx^4,\quad x\in\mathbb{R},$$

lokální maximum v bodě 0.

Řešení. Symbol o uvažujeme pro $x\to 0$. Díky 6.2.3 a 6.2.1 máme

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)\quad\text{a}$$
$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{48}+o(x^6).$$

Tedy

$$f(x)=x^4\left(\frac{12C-1}{12}\right)+x^6\left(\frac{14}{6!}\right)+o(x^6).$$

Označme $c=\frac{12C-1}{12}$. Je-li $C>\frac{1}{12}$, tj. $c>0$, máme

$$f(x)=x^4\left(c+\frac{14}{6!}x^2+o(x^2)\right).$$

Protože $\lim_{x\to 0}\left(c+\frac{14}{6!}x^2+o(x^2)\right)=c$, existuje $\delta\in\mathbb{R}$, $\delta>0$, takové, že

$$\frac{f(x)}{x^4}>\frac{c}{2},\quad x\in P(0,\delta).$$

Tedy $f(x) > 0$ pro $x \in P(0, \delta)$. Jelikož $f(0) = 0$, má v tomto případě funkce f v bodě 0 lokální minimum.

Obdobně odvodíme, že pro $C < \frac{1}{12}$ má f v 0 lokální maximum.

Je-li $C = \frac{1}{12}$, dostáváme

$$f(x) = \frac{14}{6!}x^6 + o(x^6) = x^6\left(\frac{14}{6!} + o(1)\right).$$

Zcela analogickou úvahou jako výše obdržíme, že f má v 0 lokální minimum. ♣

6.4.13. Příklad. Zjistěte, zdali je 0 inflexním bodem funkce

$$f(x) = \sin x + \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Během výpočtu budeme symbol o používat pro $x \to 0$. Pro funkci platí

$$f''(x) = (\cos x + \cosh x)' = -\sin x + \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Plat9 tedy $f''(0) = 0$. Jelikož $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, máme díky 6.2.1 a 6.2.2 vztahy

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5),\\ \sinh x &= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{n=0}^{5}\frac{x^n}{n!} + o(x^5)\right) - \left(\sum_{n=0}^{5}\frac{(-x)^n}{n!} + o(x^5)\right)\right)\\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).\end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$f''(x) = 2\frac{x^3}{3!} + o(x^5) = x^3(2 + o(x^2)).$$

Z tohoto vztahu dostáváme $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x^3} = 2$, a tedy existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $\frac{f''(x)}{x^3} > 1$ pro $x \in P(0, \delta)$. Platí tedy, že $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\delta, 0)$ a $f''(x) > 0$ pro $x \in (0, \delta)$. Podle Věty 5.5.19 má f v bodě 0 inflexní bod. ♣