1. $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
2. $\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n})$
3. $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
4. $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k + o(x^n)$
5. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$
6. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
7. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$
8. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
9. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
10. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Příklady

1

1. Rozviňte funkci $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$ v bodě $a = 4$.

   Řešení: Začneme derivovat:

$$f'(x) = -4x - 6$$
$$f'(4) = -22$$
$$f''(x) = -4$$
$$f''(4) = -4$$

   Všechny další derivace už jsou rovny 0, čímž jsme získali odpověd na otázku, jak bude dlouhý rozvoj. Dosadíme:

$$T_2^{f,4} = -54 - 22(x-4) - 4(x-4)^2 = -2x^2 - 6x + 2$$

   Vyšel nám původní polynom.

2. Odvoďte rozvoje pro následující funkce v nule do n-tého řádu.

   (a) e^x

   Řešení: Použijeme vyjádření koeficientů v lokální Taylorově větě. K tomu stačí spočítat n-tou derivaci dané funkce a dělit $n!$.

   Použijeme vyjádření koeficientů v lokální Taylorově větě. K tomu stačí spočítat n-tou derivaci dané funkce a dělit $n!$.

(2)

(1)(a)

$f(x) = e^{-x}$	in 0: 1	
$f'(x) = -e^{-x}$	-1	$T_3^{e^{-x},0} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!}$
$f''(x) = e^{-x}$	1	
$f'''(x) = -e^{-x}$	-1	

(1b) $f(x) = \sqrt{1+x}$ in 0: 1

$f' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ $\quad 1/2$

$f'' = -\frac{1}{4}\frac{1}{(\sqrt{1+x})^3}$ $\quad -1/4$

$f''' = \frac{3}{8}\frac{1}{(\sqrt{1+x})^5}$ $\quad 3/8$

$$T_3^{\sqrt{1+x},0} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}\frac{1}{6}x^3$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

(1c) $f(x) = \ln x$ in 1: 0

$f' = \frac{1}{x}$ $\quad 1$

$f'' = -\frac{1}{x^2}$ $\quad -1$

$f''' = \frac{2}{x^3}$ $\quad 2$

$$T_3^{\ln x,1} = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3$$

(1d) $f(x) = \arctan x$ in 0: 0

$f' = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad 1$

$f'' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ $\quad 0$

$f''' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$ $\quad -2$

$$T_3^{\arctan x,0} = x - \frac{2}{6}x^3 = x - \frac{x^3}{3}$$

2

(1e)

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ $x=0$ $f(0) = 1$

$f' = \frac{(-1)\cdot(-1)}{(1-x)^2}$ $f'(0) = 1$

$f'' = \frac{2}{(1-x)^3}$ $f''(0) = 2$

$T_2 \frac{1}{1-x}, 0 = 1 + x + \frac{2}{2} x^2$

$= 1 + x + x^2$

Řešení: Použijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}}{\frac{x^n}{n4^n}}\right| = \frac{1}{4}|x| \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{4}|x|$$

Řada tedy konverguje, jestliže $\frac{1}{4}|x| < 1$, t.j. pro $|x| < 4$ a diverguje pro $|x| > 4$. Poloměr konvergence je $R = 4$. Pro $x = 4$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, tato řada diverguje (viz příklad 1.4). Pro $x = -4$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, tato řada konverguje podle Leibnitzova kritéria. Obor konvergence je polootevřený interval $\langle -4, 4)$.

Cvičení 3.1: V následujících cvičeních vypočítejte poloměr konvergence a obor konvergence mocninné řady.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,3^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n+1}x^n$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty}7^n(x-1)^n$, d) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,x^{(n+1)}$,

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\,x^n$,

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n\,2^{(n-1)}}x^{(n-1)}$, h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-3)^n}x^n$.

3

3.2 Taylorovy řady

(2a) **Příklad 3.4:** Najděme rozvoj funkce $f(x) = e^x$ do Taylorovy řady v $a = 0$ a zjistěme konvergenci dané řady

Řešení: Vypočteme si několik derivací.

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(0) = 1 \end{array}$$

Taylorova řada je

$$T_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n.$$

Nyní vyšetříme konvergenci řady. Použijeme podílové kritérium

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{1}{n!}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Řada tedy konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

(2b)

(306) Najděte Maclaurinův vzorec pro obecné n a pro funkci $f(x) = \sin x$.

Řešení:

Nejdříve vyčíslíme funkci a všechny derivace v bodě x_0, tj.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0,\\
f'(x) &= \cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1,\\
f''(x) &= -\sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0,\\
f'''(x) &= -\cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} -1,\\
f^{(4)}(x) &= \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Navíc je zřejmé, že pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$
\begin{aligned}
f^{(2k)} &= (-1)^k \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0,\\
f^{(2k+1)} &= (-1)^k \cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1.
\end{aligned}
$$

Proto můžeme napsat

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos \xi,$$

kde ξ leží mezi 0 a x.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(3)

(2c)

(307) Najděte Maclaurinův vzorec pro obecné n a pro funkci $f(x) = \cos x$.

Řešení:

Nejdříve vyčíslíme funkci a všechny derivace v bodě x_0, tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1, \\ f'(x) &= -\sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0, \\ f''(x) &= -\cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} -1, \\ f'''(x) &= \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1. \end{aligned}$$

Navíc je zřejmé, že pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$\begin{aligned} f^{(2k)} &= (-1)^k \cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1, \\ f^{(2k+1)} &= (-1)^k \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0. \end{aligned}$$

Proto můžeme napsat

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \underline{(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}} + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi,$$

kde ξ leží mezi 0 a x.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

(3d)

Příklad 3.5: Najděme rozvoj funkce $f(x) = \ln(x+1)$ do Taylorovy řady v $a = 0$ a zjištěme konvergenci dané řady

Řešení: Vypočteme si několik derivací

$f(x) = \ln x + 1$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \frac{1}{x+1}$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = 2\frac{1}{(x+1)^3}$	$f'''(0) = 2$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x+1)^n}$	$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

Taylorova řada je

$$T_n(x) = 0 + \frac{0!}{1!}x - \frac{1!}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n .$$

Nyní vyšetříme konvergenci řady. Použijeme podílové kritérium

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)}x^{n+1}}{\frac{1}{n}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\,n}{n+1}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x| < 1 .$$

Řada tedy konverguje pro všechna $|x| < 1$ a diverguje pro $|x| > 1$. Pro $x = 1$ řada konverguje, pro $x = -1$ řada diverguje. Obor konvergence Taylorovy řady je polootevřený interval $(-1, 1\rangle$.

Cvičení 3.2: V následujících cvičeních najděte rozvoj funkce $f(x)$ do Taylorovy řady v a a zjištěte konvergenci dané řady.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$,

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 2$,

c) $f(x) = \sin x$, $a = 0$,

d) $f(x) = \cos x$, $a = 0$,

e) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$, $a = 1$,

f) $f(x) = \sin(2x)$, $a = \dfrac{\pi}{4}$,

g) $f(x) = e^{2x}$, $a = 0$,

h) $f(x) = 3^x$, $a = 0$.

Příklad 3.6: Rozviňme funkci $f(x) = x^2e^x$ do mocninné řady s použitím rozvoje vhodné funkce.

Řešení: Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Jednoduše dostaneme rozvoj naší funkce do mocninné řady

$$f(x) = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

(4) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad n=7 \quad a=1$

10b.

$x > 0$ 1

$f = \sqrt{x}$

$f' = \frac{1}{2} x^{-1/2}$

$\}4$

$f'' = -\frac{1}{4} x^{-3/2}$ $\qquad$ vyčíslení 1

$f''' = \frac{3}{8} x^{-5/2}$

$f^{IV} = -\frac{3\cdot 5}{16} x^{-7/2}$

$f^{V} = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{32} x^{-9/2}$

$f^{VI} = \frac{-3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{64} x^{-11/2}$

$f^{VII} = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{128} x^{-17/2}$

faktoriál

$$T_7^{\sqrt{x},1} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4\cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3!}(x-1)^3 - \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4!}(x-1)^4$$
$$+ \frac{3\cdot 5\cdot 7}{32}\frac{1}{5!}(x-1)^5 - \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{64}\cdot\frac{1}{6!}(x-1)^6$$
$$+ \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{128}\cdot\frac{1}{7!}(x-1)^7$$

1 celkové

(4) $\cos \frac{x\pi}{2}$ $\qquad T_4^{\cos \frac{x\pi}{2};\,1}$

výsledok 1b

$f = \cos \frac{x\pi}{2}$	1
$f' = -\sin \frac{x\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$	$-1 \cdot \frac{\pi}{2}$
$f'' = -\cos \frac{x\pi}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$	0
$f''' = +\sin \frac{\pi x}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3$	$1 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3$
$f^{IV} = \cos \frac{x\pi}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^4$	0

4b.

$$T_4^{\cos \frac{x\pi}{2};\,1} = 0 + \frac{-\pi/2}{1!}(x-1)^1 + \frac{(\pi/2)^3 (x-1)^3}{3!} + -\frac{(\pi/2)^5 (x-1)^5}{5!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{4} (-1)^{n+1} \frac{(\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} (x-1)^{2n+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

1b.

1 bod celkový výsledok

(5) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ Taylor řádu 7 o středu 0

10b.

$T_7^{f,0}$ $a = 0$

$f = \frac{1-x}{1+x}$ 5 1

$f' = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$ -2

1

$f'' = -2 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{(1+x)^3}$ 4

$f''' = -2 \cdot ((-2)\cdot(-3)) \frac{1}{(1+x)^4}$ $-2 \cdot 3!$

$f^{IV} = -2 \cdot ((-2)\cdot(-3)\cdot(-4)) \frac{1}{(1+x)^5}$ $+2 \cdot 4!$

$f^{V} = -2((-2)(-3)(-4)\cdot(-5)) \cdot \frac{1}{(1+x)^6}$ $-2 \cdot 5!$

$f^{VI} = -2(5!\,(-6)) \cdot \frac{1}{(1+x)^7}$ $2 \cdot 6!$

$f^{VII} = -2 \cdot (-(6!) \cdot (-7)) \cdot \frac{1}{(1+x)^8}$ $-2 \cdot 7!$

1 1 1

$T_7^{f,0} = 1 - 2(x-0) + \frac{4}{2!}(x-0)^2 + \frac{-2}{3!}\cdot 3!\,(x-0)^3 + 2(x-0)^4$
$-2(x-0)^5 + 2(x-0)^6 - 2(x-0)^7$

$= 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 - 2x^5 + 2x^6 - 2x^7$

$x \neq -1$ 1

Příklad 3.5: Najděme rozvoj funkce $f(x) = \ln(x+1)$ do Taylorovy řady v $a = 0$ a zjištěme konvergenci dané řady

Řešení: Vypočteme si několik derivací

$f(x) = \ln x + 1$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \frac{1}{x+1}$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = 2\frac{1}{(x+1)^3}$	$f'''(0) = 2$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x+1)^n}$	$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

Taylorova řada je

$$T_n(x) = 0 + \frac{0!}{1!}x - \frac{1!}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n .$$

Nyní vyšetříme konvergenci řady. Použijeme podílové kritérium

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)}x^{n+1}}{\frac{1}{n}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\,n}{n+1}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x| < 1 .$$

Řada tedy konverguje pro všechna $|x| < 1$ a diverguje pro $|x| > 1$. Pro $x = 1$ řada konverguje, pro $x = -1$ řada diverguje. Obor konvergence Taylorovy řady je polootevřený interval $(-1, 1\rangle$.

Cvičení 3.2: V následujících cvičeních najděte rozvoj funkce $f(x)$ do Taylorovy řady v a a zjištěte konvergenci dané řady.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$, b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 2$,

c) $f(x) = \sin x$, $a = 0$, d) $f(x) = \cos x$, $a = 0$,

e) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$, $a = 1$, f) $f(x) = \sin(2x)$, $a = \dfrac{\pi}{4}$,

g) $f(x) = e^{2x}$, $a = 0$, h) $f(x) = 3^x$, $a = 0$.

(4a) **Příklad 3.6:** Rozviňme funkci $f(x) = x^2 e^x$ do mocninné řady s použitím rozvoje vhodné funkce.

Řešení: Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} .$$

Jednoduše dostaneme rozvoj naší funkce do mocninné řady

$$f(x) = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} .$$

(4b)

(301) Napište Taylorův polynom pro $n = 4$, $x_0 = 1$ a $f(x) = x \ln x$.

Řešení:

Než sestavíme Taylorův polynom, musíme vyčíslit funkci a všechny potřebné (tj. až do čtvrtého řádu) derivace v bodě x_0, tj.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \ln x \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 0, \\ f'(x) &= \ln x + 1 \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 1, \\ f''(x) &= \frac{1}{x} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 1, \\ f'''(x) &= -\frac{1}{x^2} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} -1, \\ f^{(4)}(x) &= \frac{2}{x^3} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 2. \end{aligned}$$

Proto nyní dle definice platí

$$\begin{aligned} x \ln x &= 0 + 1 \cdot (x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 - \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{2}{4!}(x-1)^4 = \\ &= x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4. \end{aligned}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Nyní obě řady navzájem vynásobíme a dostaneme Maclaurinovu řadu pro funkci $e^x \sin x$

$$\begin{aligned}
e^x \sin x &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) = \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{24} + \cdots = \\
&= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots
\end{aligned}$$

Cvičení 9.3. Rozviňte následující funkce v Maclaurinovu řadu

a) $f(x) = e^{-x^2}$ $\left[1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!} + \cdots\right]$

b) $f(x) = \sin 2x$ $\left[2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} + \cdots\right]$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ $\left[1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^9 + \cdots\right]$

d) $f(x) = (1+x)\,e^x$ $\left[1 + 2x + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \cdots\right]$

e) $f(x) = \ln(1+e^x)$ $\left[\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots\right]$

(4e) **Příklad 9.4.** Rozložte v Taylorovu řadu následující funkce

$$\text{a)}\, f(x) = \sqrt{x^3} \text{ v bodě } x_0 = 1.$$

Řešení. Platí

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} &&\Rightarrow && f'(1) = \tfrac{3}{2}, \\
f''(x) &= \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} &&\Rightarrow && f''(2) = \tfrac{3}{2^2}, \\
f'''(x) &= -\tfrac{3}{2^2}\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} &&\Rightarrow && f'''(3) = -\tfrac{3}{2^3}.
\end{aligned}$$

Dosazením do Taylorovy řady dostáváme

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{2^2\cdot 2!}(x-1)^2 - \frac{3}{2^3\cdot 3!}(x-1)^3 + \cdots = \\
&= 1 + \frac{3}{2}\left[(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(x-1)^3}{2^2\cdot 3!} + \cdots\right].
\end{aligned}$$

(4d)

$$\text{b)} f(x) = \frac{1}{x} \text{ v bodě } x_0 = 3.$$

Řešení. Platí

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\tfrac{1}{x^2} & \Rightarrow \quad & f'(1) = -\tfrac{1}{3^2}, \\
f''(x) &= \tfrac{2}{x^3} & \Rightarrow \quad & f''(2) = \tfrac{2}{3^3}, \\
f'''(x) &= -\tfrac{6}{x^4} & \Rightarrow \quad & f'''(3) = -\tfrac{6}{3^4}.
\end{aligned}$$

Po dosazení dostáváme Taylorovu řadu ve tvaru

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-3) + \frac{2}{3^3 \cdot 2!}(x-3)^2 - \frac{6}{3^4 \cdot 3!}(x-3)^3 + \cdots = \\
&= \frac{1}{3}\left[1 - \frac{x-3}{3} + \frac{(x-3)^2}{3^2} - \frac{(x-3)^3}{3^3} + \cdots\right].
\end{aligned}$$

Cvičení 9.4. Rozložte v Taylorovu řadu následující funkce

$$\text{a)} f(x) = \frac{1}{x} \text{ v bodě } x_0 = -2$$

$$\left[f(x) = -\tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{x+2}{2} + \tfrac{(x+2)^2}{4} + \cdots + \tfrac{(x+2)^n}{2^n} + \cdots\right)\right]$$

$$\text{b)} f(x) = \ln x \text{ v bodě } x_0 = 1$$

$$\left[f(x) = (x-1) - \tfrac{(x-1)^2}{2} + \tfrac{(x-1)^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\tfrac{(x-1)^n}{n} + \cdots\right]$$

$$\text{c)} f(x) = \sin\frac{x\pi}{4} \text{ v bodě } x_0 = 2$$

$$\left[f(x) = 1 - \left(\tfrac{\pi}{4}\right)^2 \tfrac{(x-2)^2}{2!} + \left(\tfrac{\pi}{4}\right)^4 \tfrac{(x-2)^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \left(\tfrac{\pi}{4}\right)^{2n} \tfrac{(x-2)^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right]$$

(304) Vyjádřete funkci $\sin\frac{x\pi}{4}$ pomocí mocnin $x-2$.

<u>**Řešení:**</u>

Takovéto vyjádření je možné pomocí Taylorova polynomu. Ze zadání plyne, že $x_0 = 2$ a že musíme polynom sestavit v obecné podobě, neboť nebyl zadán stupeň aproximace. Proto

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 1,\\
f'(x) &= \frac{\pi}{4}\cos\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 0,\\
f''(x) &= -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\sin\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2,\\
f'''(x) &= -\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\cos\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 0,\\
f^{(4)}(x) &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^4\sin\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} \left(\frac{\pi}{4}\right)^4.
\end{aligned}$$

Z tvaru jednotlivých derivací můžeme pro $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ odvodit

$$\begin{aligned}
f^{(2k)}(x) &= (-1)^k\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\sin\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} (-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k},\\
f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1}\cos\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 0.
\end{aligned}$$

Proto hledaný Taylorův polynom je tvaru

$$\sin\frac{x\pi}{4} = 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

(b) $\sin x$

Řešení: Použijeme vyjádření koeficientů v lokální Taylorově větě. K tomu stačí spočítat n-tou derivaci dané funkce a dělit $n!$.

(c) $\cos x$

Řešení: Platí, že

$$(\cos x)^{(4n+1)} = -\sin x, \quad (\cos x)^{(4n+2)} = -\cos x,$$
$$(\cos x)^{(4n+3)} = \sin x, \quad (\cos x)^{(4n)} = \cos x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

a tedy

$$(\cos x)^{(4n+1)}(0) = 0, \quad (\cos x)^{(4n+2)} = -1, \quad (\cos x)^{(4n+3)}(0) = 0,$$
$$(\cos x)^{(4n)} = 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

všechny liché derivace jsou tedy nulové a sudé lze vyjádřit jedním vztahem

$$(\cos x)^{(2n)}(0) = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

(d) $\ln(1+x)$ **Řešení:** Platí, že

$$[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}, \qquad [\ln(1+x)]'' = -\frac{1}{(1+x)^2},$$
$$[\ln(1+x)]''' = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}, \qquad [\ln(1+x)]'''' = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}$$

odkud lze vyvodit, že

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

V nule dostaneme

$$[\ln(1+x)]^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

3a

3. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$f(x) = e^{2x-x^2}$$

do pátého řádu.

Řešení: Podle vztahu pro rozvoj exponenciální funkce dostaneme

$$e^{2x-x^2} = 1 + (2x-x^2) + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!} + \frac{(2x-x^2)^4}{4!} + \frac{(2x-x^2)^5}{5!} =$$
$$= 1+(2x-x^2)+\frac{1}{2}(4x^2-4x^3+x^4)+\frac{1}{6}(8x^3-12x^4+6x^5+o(x^5))+\frac{1}{24}(16x^4-32x^5+o(x^5))$$
$$+\frac{1}{120}(32x^5+o(x^5)) =$$
$$= 1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5)$$

Návod: Po vytknutí je

$$f(x) = a\sqrt[m]{1+x/a^m} = a(1+x/a^m)^{1/m}$$

Podle vztahu pro rozvoj mocniny je

$$(1+x/a^m) = 1 + \frac{1}{m}\frac{x}{a^m} + \frac{\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)}{2!}\left(\frac{x}{a^m}\right)^2 + o(x^2) =$$

$$= 1 + \frac{1}{m}\frac{x}{a^m} + \frac{1-m}{2m^2}\frac{x^2}{a^{2m}} + o(x^2)$$

a tedy

$$f(x) = a(1+x/a^m) = a + \frac{x}{ma^{m-1}} + \frac{1-m}{2m^2}\frac{x^2}{a^{2m-1}} + o(x^2)$$

(6b)

I.6. *Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce*

$$f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$$

do třetího řádu.

Návod: Podle vztahu pro rozvoj mocniny je

$$(1+(-2x+x^3))^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(-2x+x^3) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-2x+x^3)^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}(-2x+x^3)^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + \frac{-2x+x^3}{2} + \left(-\frac{4x^2}{8} + o(x^3)\right) + \left(\frac{3}{8}\frac{1}{6}(-8x^3) + o(x^3)\right) + o(x^3) =$$

$$= 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Pro druhou mocninu dostaneme

$$(1+(-3x+x^2))^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}(-3x+x^2) + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}(-3x+x^2)^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}(-3x+x^2)^3 =$$

$$= 1 + \frac{-3x+x^2}{3} + \left(\frac{-1}{9}\cdot(9x^2-6x^3) + o(x^3)\right) + \left(\frac{10}{27}\cdot\frac{1}{6}\cdot(-27x^3) + o(x^3)\right) =$$

$$= 1 - x + \frac{x^2}{3} - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^3 + o(x^3) = 1 - x - \frac{2}{3}x^2 - x^3 + o(x^3)$$

Dohromady dostáváme

$$\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} =$$

$$= \left(1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(1 - x - \frac{2}{3}x^2 - x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3)$$

I.7. *Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce*

$$f(x) = e^{2x-x^2}$$

do pátého řádu.

Návod: Podle vztahu pro rozvoj exponenciální funkce dostaneme

$$e^{2x-x^2} = 1 + (2x-x^2) + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!} + \frac{(2x-x^2)^4}{4!} + \frac{(2x-x^2)^5}{5!} =$$

$$= 1+(2x-x^2)+\frac{1}{2}(4x^2-4x^3+x^4)+\frac{1}{6}(8x^3-12x^4+6x^5+o(x^5))+\frac{1}{24}(16x^4-32x^5+o(x^5))+\frac{1}{120}(32x^5+o(x^5)) =$$

$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$$

4. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

6c

3b

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$

do čtvrtého řádu. Určete $f^{(4)}(0)$.

Řešení: Na nějakém okolí nuly, kde $|x-x^2|<1$, platí rovnost

$$\begin{aligned}
&\frac{1+x+x^2}{1-(x-x^2)} \\
&= (1+x+x^2)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(x-x^2)^k = \\
&(1+x+x^2)+(1+x+x^2)(x-x^2)+(1+x+x^2)(x-x^2)^2 \\
&+(1+x+x^2)(x-x^2)^3+(1+x+x^2)(x-x^2)^4+o(x^4) = \\
&= (1+x+x^2)+(x+x^2+x^3-x^2-x^3-x^4) \\
&+(x^2+x^3+x^4-2x^3-2x^4+x^4+o(x^4))+(x^3+x^4-3x^4+o(x^4)) \\
&+(x^4+o(x^4))+o(x^4) = \\
&= 1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

Z jednoznačnosti rozvoje pak vyplývá, že $f^{(4)}(0)/4! = -2$, a tedy $f^{(4)}(0) = -48$.

5. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

3c

$$f(x) = \ln(\cos x)$$

do šestého řádu.

Řešení:

Je

$$f(x) = \ln(\cos x) = \ln(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)) =$$

Označme $V(x) = -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)$

$$= V(x) - \frac{V(x)^2}{2} + \frac{V(x)^3}{3} + o(x^6) =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-2\frac{x^2}{2}\frac{x^4}{24}+o(x^6)\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{8}+o(x^6)\right) =$$

$$= -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6)$$

$$(\operatorname{arctg} x)''''' = \frac{384x^4}{(1+x^2)^5} - \frac{288x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{24}{(1+x^2)^3} \implies (\operatorname{arctg} x)'''''(0) = 24$$

Odtud plyne, že

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \qquad (\text{dokonce } o(x^6)).$$

I.3. *Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce*

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$

do čtvrtého řádu. Určete $f^{(4)}(0)$.

Návod: Na nějakém okolí nuly, kde $|x - x^2| < 1$, platí rovnost

$$\frac{1+x+x^2}{1-(x-x^2)} = (1+x+x^2) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (x-x^2)^k =$$

$$= (1+x+x^2)+(1+x+x^2)(x-x^2)+(1+x+x^2)(x-x^2)^2+(1+x+x^2)(x-x^2)^3+(1+x+x^2)(x-x^2)^4+o(x^4) =$$

$$= (1+x+x^2)+(x+x^2+x^3-x^2-x^3-x^4)+(x^2+x^3+x^4-2x^3-2x^4+x^4+o(x^4))+(x^3+x^4-3x^4+o(x^4))+(x^4+o(x^4))+o(x^4) =$$

$$= 1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)$$

Z jednoznačnosti rozvoje pak vyplývá, že $f^{(4)}(0)/4! = -2$, a tedy $f^{(4)}(0) = -48$.

(6a)

I.4. *Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce*

$$f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$$

do druhého řádu.

Návod: Na nějakém okolí nuly, kde $|2x| < 1$, platí rovnost

$$\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}} = (1+x)^{100} \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^k\right]^{40} \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-2x)^k\right]^{60} =$$

$$= \left[1 + 100x + \frac{100 \cdot 99}{2!}x^2 + o(x^2)\right] \cdot \left[1+2x+4x^2+o(x^2)\right]^{40} \cdot \left[1-2x+4x^2+o(x^2)\right]^{60} =$$

$$= \left[1 + 100x + \frac{100 \cdot 99}{2!}x^2 + o(x^2)\right] \cdot$$

$$\cdot \left[1 + 40 \cdot (2x+4x^2) + \frac{40 \cdot 39}{2!}(2x+4x^2)^2 + o(x^2)\right] \cdot \left[1 - 60 \cdot (2x-4x^2) + \frac{60 \cdot 59}{2!}(2x-4x^2)^2 + o(x^2)\right] =$$

$$= \left[1 + 100x + \frac{100 \cdot 99}{2!}x^2 + o(x^2)\right] \cdot \left[1 + 80x + 160x^2 + \frac{40 \cdot 39}{2!}4x^2 + o(x^2)\right] \cdot \left[1 - 120x + 240x^2 + \frac{60 \cdot 59}{2!}4x^2 + o(x^2)\right] =$$

$$= 1 + 60x + (50 \cdot 99 + 4 \cdot 20 \cdot 39 + 4 \cdot 30 \cdot 59 + 100 \cdot 80 - 100 \cdot 120 - 80 \cdot 120 + 160 + 240)x^2 + o(x^2) =$$

$$= 1 + 60x + 1950x^2 + o(x^2)$$

I.5. *Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce*

$$f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}, \qquad \text{kde } a > 0$$

do druhého řádu.

4. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

3b

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$

do čtvrtého řádu. Určete $f^{(4)}(0)$.

Řešení: Na nějakém okolí nuly, kde $|x-x^2| < 1$, platí rovnost

$$\frac{1+x+x^2}{1-(x-x^2)}$$

$$= (1+x+x^2)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(x-x^2)^k =$$

$$(1+x+x^2) + (1+x+x^2)(x-x^2) + (1+x+x^2)(x-x^2)^2$$

$$+(1+x+x^2)(x-x^2)^3 + (1+x+x^2)(x-x^2)^4 + o(x^4) =$$

$$= (1+x+x^2) + (x+x^2+x^3-x^2-x^3-x^4)$$

$$+(x^2+x^3+x^4-2x^3-2x^4+x^4+o(x^4)) + (x^3+x^4-3x^4+o(x^4))$$

$$+(x^4+o(x^4)) + o(x^4) =$$

$$= 1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)$$

Z jednoznačnosti rozvoje pak vyplývá, že $f^{(4)}(0)/4! = -2$, a tedy $f^{(4)}(0) = -48$.

5. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

(6e) 3c

$$f(x) = \ln(\cos x)$$

do šestého řádu.

Řešení:

Je

$$f(x) = \ln(\cos x) = \ln(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)) =$$

Označme $V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$

$$= V(x) - \frac{V(x)^2}{2} + \frac{V(x)^3}{3} + o(x^6) =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2}\frac{x^4}{24} + o(x^6)\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{8} + o(x^6)\right) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$$

(6f) 3d

6. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$f(x) = \sin(\sin x)$$

do třetího řádu.

Řešení: Je

$$f(x) = \sin(\sin x) = \sin(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) =$$

Označme $V(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$= V(x) - \frac{V(x)^3}{6} + o(x^3) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) =$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

3e

7. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

do čtvrtého řádu.

Řešení:

Na vhodném okolí nuly je

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! + o(x^6)} =$$

$$\frac{1}{1 + x/2! + x^2/3! + x^3/4! + x^4/5! + o(x^5)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)\right)^k =$$

Označme $V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$

$$= 1 - V(x) + V(x)^2 - V(x)^3 + V(x)^4 - V(x)^5 + o(x^5).$$

Rozveďme jednotlivé mocniny $V(x)$ do pátého řádu.

$$V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$$

I.8. *Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce*

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

do čtvrtého řádu.

Návod: Na vhodném okolí nuly je

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! + o(x^6)} = \frac{1}{1 + x/2! + x^2/3! + x^3/4! + x^4/5! + o(x^5)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5) \right)^k =$$

Označme $V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$

$$= 1 - V(x) + V(x)^2 - V(x)^3 + V(x)^4 - V(x)^5 + o(x^5).$$

Rozveďme jednotlivé mocniny $V(x)$ do pátého řádu.

$$V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$$

$$V(x)^2 = \frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!3!} + 2\frac{x^4}{2!4!} + 2\frac{x^5}{2!5!} + 2\frac{x^5}{3!4!} + o(x^5)$$

$$V(x)^3 = \frac{x^3}{2!2!2!} + 3\frac{x^4}{2!2!3!} + 3\frac{x^5}{2!2!4!} + 3\frac{x^5}{2!3!3!} + o(x^5)$$

$$V(x)^4 = \frac{x^4}{2!2!2!2!} + 4\frac{x^5}{2!2!2!3!} + o(x^5)$$

$$V(x)^5 = \frac{x^5}{2!2!2!2!2!} + o(x^5)$$

Když všechny příspěvky sečteme, resp. odečteme, dostaneme

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^5)$$

(6g)

I.9. *Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce*

$$f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}$$

do třináctého řádu.

Návod: Je

$$f(x) = (x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{21}))^{1/3} =$$

$$= x(1 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{18}))^{1/3}$$

Dále budeme aproximovat pouze závorku, stačí do dvanáctého řádu.

$$(1 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{18}))^{1/3} =$$

Označme $V(x) = -\frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{18})$, pak dostaneme

$$1 + \frac{1}{3}V(x) - \frac{2}{9}\frac{1}{2!}V(x)^2 + o(x^{13}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{3}\frac{1}{5!}x^{12} - \frac{1}{9}\frac{1}{(3!)^2}x^{12} + o(x^{13}) = 1 - \frac{1}{18}x^6 - \frac{1}{3240}x^{12} + o(x^{13})$$

6. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

3d

$$f(x) = \sin(\sin x)$$

do třetího řádu.

Řešení: Je

$$f(x) = \sin(\sin x) = \sin(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) =$$

Označme $V(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$= V(x) - \frac{V(x)^3}{6} + o(x^3) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) =$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

7. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

(6.e) 3e

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

do čtvrtého řádu.

Řešení:

Na vhodném okolí nuly je

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! + o(x^6)} =$$

$$\frac{1}{1 + x/2! + x^2/3! + x^3/4! + x^4/5! + o(x^5)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)\right)^k =$$

Označme $V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$

$$= 1 - V(x) + V(x)^2 - V(x)^3 + V(x)^4 - V(x)^5 + o(x^5).$$

Rozveďme jednotlivé mocniny $V(x)$ do pátého řádu.

$$V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$$

(6a)

$$V(x)^2 = \frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!3!} + 2\frac{x^4}{2!4!} + 2\frac{x^5}{2!5!} + 2\frac{x^5}{3!4!} + o(x^5)$$

$$V(x)^3 = \frac{x^3}{2!2!2!} + 3\frac{x^4}{2!2!3!} + 3\frac{x^5}{2!2!4!} + 3\frac{x^5}{2!3!3!} + o(x^5)$$

$$V(x)^4 = \frac{x^4}{2!2!2!2!} + 4\frac{x^5}{2!2!2!3!} + o(x^5)$$

$$V(x)^5 = \frac{x^5}{2!2!2!2!2!} + o(x^5)$$

Když všechny příspěvky sečteme, resp. odečteme, dostaneme

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^5)$$

(3l) 8. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$f(x) = \mathrm{tg}\, x$$

do pátého řádu.

Řešení: Je

$$f(x) = \mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} =$$

na vhodném okolí nuly

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^k =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) + (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) +$$

$$(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5) =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{4!} - \frac{x^5}{3!2!} + o(x^5) + \frac{x^5}{2!2!} + o(x^5) + o(x^5) =$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

(6i)

I.13. *Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce*

$$f(x) = \ln \frac{\sin x}{x}$$

do šestého řádu.

Návod: Sledujte výpočet.

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \ln \left(\frac{x - x^3/6 + x^5/120 - x^7/7! + o(x^8)}{x} \right) = \ln \left(1 - x^2/6 + x^4/120 - x^6/7! + o(x^7)\right) =$$

označme $V(x) = -x^2/6 + x^4/120 - x^6/7! + o(x^7)$ a rozvinutím logaritmu máme

$$= V(x) - \frac{V(x)^2}{2} + \frac{V(x)^3}{3} + o(x^6) =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7)\right)^3 + o(x^6) =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{36} - 2\frac{x^2}{6}\frac{x^4}{120} + o(x^6)\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{6}\right)^3 + o(x^6) + o(x^6) =$$

$$= -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 - \frac{1}{2835}x^6 + o(x^6)$$

(Dokonce $o(x^7)$.)

Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

I.14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$

Návod: Sledujte výpočet.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\frac{x^4}{4} + o(x^5))}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{4!} - \frac{1}{4}\frac{1}{2!} + o(x) = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + 0 = -\frac{1}{12}.$$

I.15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

Návod: Sledujte výpočet.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - x - x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - x^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

I.16. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$

$$V(x)^2 = \frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!3!} + 2\frac{x^4}{2!4!} + 2\frac{x^5}{2!5!} + 2\frac{x^5}{3!4!} + o(x^5)$$

$$V(x)^3 = \frac{x^3}{2!2!2!} + 3\frac{x^4}{2!2!3!} + 3\frac{x^5}{2!2!4!} + 3\frac{x^5}{2!3!3!} + o(x^5)$$

$$V(x)^4 = \frac{x^4}{2!2!2!2!} + 4\frac{x^5}{2!2!2!3!} + o(x^5)$$

$$V(x)^5 = \frac{x^5}{2!2!2!2!2!} + o(x^5)$$

Když všechny příspěvky sečteme, resp. odečteme, dostaneme

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^5)$$

(32) (6j)

8. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

do pátého řádu.

Řešení: Je

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} =$$

na vhodném okolí nuly

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^k =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) + (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) +$$

$$(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5) =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{4!} - \frac{x^5}{3!2!} + o(x^5) + \frac{x^5}{2!2!} + o(x^5) + o(x^5) =$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$(37) \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \quad \textit{pro} \;\; x \to 0 \;\; \textit{a každé} \;\; \alpha \in \mathbb{R};$$

$$(38) \qquad \arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad \textit{pro} \;\; x \to 0;$$

$$(39) \qquad \operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad \textit{pro} \;\; x \to 0.$$

Poznámka 6.6. Jak snadno nahlédneme, je *n-tý Taylorův polynom součtu resp. rozdílu dvou funkcí roven součtu resp. rozdílu jejich n-tých Taylorových polynomů.*

Taylorovy polynomy lze i („zkráceně") *násobit*, a to takto: *Jsou-li*

$$(40) \qquad \mathcal{T}^{f}_{a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_j (x-a)^j, \quad \mathcal{T}^{g}_{a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k$$

n-té Taylorovy polynomy funkcí f, g, je n-tý Taylorův polynom součinu fg roven součtu všech výrazů tvaru $a_j b_k (x-a)^{j+k}$, kde $j+k \le n$, tj. roven

$$(40') \qquad \mathcal{T}^{fg}_{a,n}(x) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} (x-a)^m .$$

Jinými slovy: Podobně jako při tzv. zkráceném násobení čísel násobíme jen ty dvojice sčítanců, u nichž je výsledný mocnitel výrazu $(x-a)$ nejvýše roven n. Všechny takové součiny sečteme a zpravidla i uspořádáme tak jako ve (40′).

(62) 39 **Příklad 6.9.** Abychom získali pátý Taylorův polynom funkce $e^{-x^2} \arcsin x$ o středu 0, násobíme pátý Taylorův polynom prvního faktoru pátým Taylorovým polynomem druhého faktoru, ale ponecháme si jen mocniny x^m s $m \le 5$:

$$(41) \qquad e^{-x^2} \arcsin x = \left(1 - x^2 + \tfrac{1}{2} x^4 + o(x^5)\right)\left(x + \tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{3}{40} x^5 + o(x^5)\right)$$
$$= x + \left(-1 + \tfrac{1}{6}\right) x^3 + \left(\tfrac{3}{40} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}\right) x^5 + o(x^5) = x - \tfrac{5}{6} x^3 + \tfrac{49}{120} x^5 + o(x^5).$$

Všechny ostatní součiny „přešly" (podle (20) a (21)) do $o(x^5)$. □

Taylorovy polynomy lze též *dělit*:

40 **Příklad 6.10.** Pátý Taylorův polynom funkce $\operatorname{tg} x$ v bodě 0 lze získat (opět „zkráceným") dělením pátého Taylorova polynomu funkce $\sin x$ pátým Taylorovým polynomem funkce $\cos x$. Běžným algoritmem dostaneme tento výsledek:

$$(42) \qquad \operatorname{tg} x = \left(x - \tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{1}{120} x^5 + o(x^5)\right) : \left(1 - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{24} x^4 + o(x^5)\right)$$
$$= x + \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{2}{15} x^5 + o(x^5).$$

(3 h)

(6e)

$$\frac{1}{3-2x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}x}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}x\right)^{-1}.$$

Poté položíme $-\frac{2}{3}x=t$ a dostaneme funkci $\frac{1}{3}(1+t)^{-1}$. Její rozvoj do binomické řady je

$$\frac{1}{3}(1+t)^{-1}=\frac{1}{3}\left[1+\binom{-1}{1}t+\binom{-1}{2}t^2+\cdots+\binom{-1}{n}t^{+}\cdot\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}t^n,\quad t\in(-1,1).$$

Po dosazení za $t=-\frac{2}{3}x$ získáme Maclaurinovu řadu

$$\begin{aligned}\frac{1}{3-2x} &= \frac{1}{3}\left[1+\binom{-1}{1}\left(-\frac{2}{3}x\right)+\cdots+\binom{-1}{n}\left(-\frac{2}{3}x\right)^n+\cdots\right]=\\ &= 1+(-1)\left(-\frac{2}{3}x\right)+\cdots+\frac{(-1)^n n!}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n(-1)^n x^n+\cdots=\\ &= \frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}x+\frac{(-1)(-2)}{2!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2x^2+\cdots+\frac{n!}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n+\cdots\right]=\\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n.\end{aligned}$$

d) $f(x)=e^{\cos x}$.

Řešení. Provedeme rozvoje v Maclaurinovu řadu pro funkce e^x a $\cos x$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned}e^{\cos x} &= e\cdot e^{-\frac{x^2}{2!}}\cdot e^{\frac{x^4}{4!}}+\cdots=e\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2!}\right)^2}{2!}+\cdots\right]\left[1+\frac{x^4}{4!}+\frac{\left(\frac{x^4}{4!}\right)^2}{2!}+\cdots\right]=\\ &= e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^4}{24}+\frac{x^8}{2\cdot 24^2}+\cdots\right)=e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+\cdots\right).\end{aligned}$$

e) $f(x)=e^x\sin x$.

Řešení. Maclaurinova řada pro funkci e^x (viz předchozí příklad) a $\sin x$ je

7

$\boxed{(3)(a)}$ $\sqrt[3]{e} = e^{1/3}$

$= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

kalkulačka : 1,39561

(b) arcsin 0,2

$= 0,2$

kalk: 0,201

(c) $(1,04)^4 = (1 + 0,04)^4$

$= 1 + 4 \cdot 0,04 = 1,16$

k: 1,1699

(d) $\ln(1,02) = \ln(1 + 0,02)$

$= x = 0,02$

k: 0,01980

(e) arctan (1,1)

$=$ "x" $\rightarrow$ 1,1

k: 0,83298

pro rozvoj v $a = 1$

$f(1) = \frac{\pi}{4}$ $f' = \frac{1}{1+x^2}$ $f'(1) = \frac{1}{2}$

$T_1^{f,1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1)$

$\rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot (0,1) = \frac{\pi}{4} + 0,05 \doteq \frac{3,14}{4} + 0,05 = \underline{\underline{0,835}}$

(f) sin (−0,22)

$= -0,22$

kalk. −0,2182

(8) (308) Užitím Maclaurinova polynomu vypočtěte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než 0,001.

Řešení:

Z Příkladu 305 víme, že platí

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

což pro $x = 1$ dává

$$e = 1 + x + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!},$$

kde $\xi \in (0,1)$. K tomu, abychom dosáhli chyby menší než 0,001, musíme vyřešit nerovnici

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!} < 0,0001 \;\Big|\, \text{protože } \xi \in (0,1) \,\Big| \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{(n+1)!} < 0,0001 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3000 < (n+1)! \quad \Rightarrow \quad n > 5.$$

Proto musíme použít Taylorův polynom alespoň šestého stupně, tj.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2,718055556.$$

(. 9) (309) Pro jaké hodnoty x platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností $0,0001$?

Řešení:

Z Příkladu 307 pro $n = 2$ víme, že platí

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + R_2(x),$$

kde $R_2(x) = \frac{x^4 \cos \xi}{4!}$ a ξ leží mezi 0 a x. Z omezenosti funkce $\cos x$ plyne, že

$$\left| \frac{x^4 \cos \xi}{24} \right| \leq \frac{|\cos \xi|\, x^4}{24} \leq \frac{x^4}{24}.$$

Musíme proto vyřešit nerovnici

$$\frac{x^4}{24} \leq 0,0001 \quad \Rightarrow \quad x^4 \leq 0,00\overset{24}{\cancel{01}}.$$

Řešením tedy je $x \in [-\sqrt[4]{0,0024}, \sqrt[4]{0,0024}] \doteq [-0,222, 0,222]$, tj. $|x| \leq 0,222 = 12°30'$.

(10)

(303) Určete maximální chybu v aproximaci z Příkladu 302, kde $x \in (0,9;1,1)$.

Řešení:

Chyba je určena výrazem

$$R_2(x) = \frac{6\xi^2 - 2}{6(\xi^2+1)^3}(x-1)^3, \quad 0,9 < \xi < 1,1.$$

Musíme tedy vhodně omezit výraz $|R_2(x)|$ a tak určit maximální chybu aproximace. Nejdříve se zaměříme na čitatele, tj.

$$|6\xi^2 - 2| \; \big|\, |a+b| \le |a| + |b| \,\big| \; \le 6|\xi|^2 + 2 < 6 \cdot 1,1^2 + 2 = 9,26.$$

Jmenovatele omezíme takto

$$|6(\xi^2+1)^3| = 6\left(\xi^2+1\right)^3 \ge 10,86, \quad \text{neboť jistě platí } \xi^2 + 1 > 0,9^2 + 1 = 1,81.$$

Proto nyní můžeme psát

$$|R_2(x)| = \left|\frac{6\xi^2-2}{6(\xi^2+1)^3}\right| |(x-1)|^3 \le \frac{9,26}{10,86}|(x-1)|^3 \le 0,8526 \cdot 0,1^3 = 0,00085 \doteq 0,0009.$$

Maximální chyba aproximace Taylorovým polynomem druhého stupně je $0,0009$.

(11)

(310) Pomocí Taylorova polynomu pro $n = 3$ určete přibližně $\sqrt[3]{30}$.

Řešení:

Uvažujme funkci $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a položme $x_0 = 27$. Vypočteme funkční hodnotu a všechny potřebné derivace v bodě x_0, tj.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt[3]{x} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} 3,\\
f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} \frac{1}{27},\\
f''(x) &= -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} -\frac{2}{2187},\\
f'''(x) &= \frac{10}{27\sqrt[3]{x^8}} \overset{x_0=27}{\rightsquigarrow} \frac{10}{177147}.
\end{aligned}
$$

Nyní můžeme vypočítat přibližnou hodnotu

$$\sqrt[3]{30} = 3 + \frac{1}{27}\cdot 3 + \frac{-\frac{8}{2187}}{2}\cdot 3^2 + \frac{\frac{10}{177147}}{6}\cdot 3^3 \doteq 3,10725.$$

(12) (311) Pomocí Maclaurinova mnohočlenu třetího stupně, vyjádřete hodnotu $\cos 1^\circ$ (výsledek uveďte na 6 desetinných míst).

Řešení:

Z Příkladu 307 víme, že platí

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2},$$

proto obdržíme

$$\cos 1^\circ = \cos \frac{\pi}{180} = 1 - \frac{\frac{\pi^2}{180^2}}{2} \doteq 0,999847.$$

(13) $T_3^{f,0} = 2 - x - \frac{x^2}{3} + 2x^3$

$f(0) = 2 \qquad f'(0) = -1 \qquad f''(0) = -\frac{2}{3} \qquad f'''(0) = 12$

(protože $\frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{3}$ ...)

(14) D

$$\frac{1}{2}\left(1 + -\frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2x^2}{2} + \frac{4}{2} \cdot \frac{x^4}{6}$$

(15) Ne. Např. $f = e^x \qquad g = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

(16) Ano, neb $f''(0) = -2$.

↳ tedy alespoň za předpokladu, že f má spoj. 2. derivaci

(17) (c) → lépe aproximovat u bodu $a = \pi$