1. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazveme *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.*

Definice 2. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a f má konečné derivace všech řádů v bodě a. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou se středem v bodě a.* (Připomeňme, že ve výše uvedeném vzorci uvažujeme $0! = 1$ a $0^0 = 1$.)

Věta 3 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $a < x$. Nechť f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-derivaci. Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Definice 4. Nechť f, g jsou reálné funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f *je v bodě a malé o od g* (značíme $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$), pokud $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Speciálně, zápis

$$f(x) = o(x^n)$$

značí, pokud $f \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí nuly, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

Věta 5 (Vlastnosti o)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Jestliže $f_1(x) = o(g(x)),\ x \to a,$ a $f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a$, pak

$$(f_1 \pm f_2)(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

2. Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x)),\ x \to a,$ a $f_2(x) = o(g_2(x)),\ x \to a$, pak

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = o((g_1 \cdot g_2)(x)),\ x \to a.$$

3. Jestliže $f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a,$ a $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{R}$, pak

$$f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$

4. Jestliže $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$ a h je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, pak
$$(h \cdot f)(x) = o(g(x)h(x)), x \to a.$$
5. Jestliže $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, pak
$$(h \cdot f)(x) = o(g(x)), x \to a.$$
6. Je-li $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$, a $f(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$, potom
$$f(x) = o((x-a)^m),\ x \to a.$$

Věta 6. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, nechť φ je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí bodu b. Nechť $f(y) = o(g(y))$, $y \to b$ a $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$. Nechť dále existuje $\delta > 0$ takové, že
$$\forall x \in P(a, \delta) : \varphi(x) \neq b.$$
Pak
$$f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))),\ x \to a.$$

Poznámka 7.
1. Výraz $R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme *zbytkem po Taylorově polynomu řádu n*.
2. Peanova věta tedy říká, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.

Základní algoritmus

1. Zderivujeme funkci až do n-tého stupně.
2. Dosadíme bod a - získáme koeficienty.
3. Sestavíme Taylorův polynom.

Příklady

Z definice

1. Rozviňte funkci $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$ v bodě $a = 4$.

   Jak vypadá Taylorův polynom polynomu?
2. Najděte Taylorův polynom 3. stupně v 0 (není-li řečeno jinak)

   (a) e^{-x} (c) $\ln x$, v 1 (e) $\frac{1}{1-x}$
   (b) $\sqrt{1+x}$ (d) $\arctan x$

3. Odvoďte rozvoje pro následující funkce v nule do n-tého řádu. Najděte Taylorovy řady v 0.

   (a) e^x (b) $\sin x$ (c) $\cos x$ (d) $\ln(1+x)$

4. Najděte Taylorovy řady/polynomy:

   (a) $\sqrt{x}$, v 1 do 7. stupně
   (b) $\cos\frac{x\pi}{2}$, v 1, do 9. stupně
   (c) $\frac{1-x}{1+x}$, v 0, do 7. stupně
   (d) x^2e^x, v 0
   (e) $x\ln x$, v 1, do 4. stupně
   (f) $\sqrt{x^3}$, v 1
   (g) $\frac{1}{x}$, v 3

5. Vyjádřete funkci $\sin\frac{x\pi}{4}$ pomocí mocnin $x-2$.

Použitím vět

6. Odvoďte Taylorův rozvoj funkce v $x_0 = 0$ do m-tého řádu

   (a) $f(x) = e^{2x-x^2}$, $m = 5$.
   (b) $f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[4]{1-3x+x^2}$, $m = 3$.
   (c) $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $m = 4$.
   (d) $f(x) = \dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$, $m = 2$.
   (e) $f(x) = \ln(\cos x)$, $m = 6$.
   (f) $f(x) = \sin(\sin x)$, $m = 3$.
   (g) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}$, $m = 13$.
   (h) $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1}$, $m = 4$.
   (i) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$, $m = 6$.
   (j) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $m = 5$.
   (k) $f(x) = e^{-x^2}\arcsin x$, $m = 5$
   (l) $\dfrac{1}{3-2x}$, $m = \infty$

Odhady

7. Pomoci Taylorova polynomu 1. stupně určete přibližné hodnoty následujících výrazů (a porovnejte s kalkulačkou)

   (a) $\sqrt[3]{e}$ (c) $(1,04)^4$ (e) $\arctan 1,1$
   (b) $\arcsin 0,2$ (d) $\ln(1,02)$ (f) $\sin(-0,22)$

8. Vypočtěte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než $0,001$.

9. Pro jaké hodnoty platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností $0,0001$?
10. Určete maximální chybu, které se dopustíme, nahradíme-li na intervalu $(0,9; 1,1)$ funkci $\arctan x$ Taylorovým polynomem stupně 2 v bodě $x_0 = 1$.
11. Pomocí Taylorova polynomu pro $n = 3$ určete přibližnou hodnotu $\sqrt[3]{30}$.
12. Určete hodnotu $\cos 1^\circ$ pomocí Taylora 3. stupně.

Bonus

13. Víte-li, že Taylorův polynom funkce f je $T_3^{f,0} = 2 - x - x^2/3 + 2x^3$, určete hodnoty

    (a) $f(0)$ (b) $f'(0)$ (c) $f''(0)$ (d) $f'''(0)$

14. Víte-li, že Taylorova řada $\cos x$ v 0 je $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, jak je na tom $\frac{1}{2}\cos(2x)$?

    (A) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ (B) $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48}$ (C) $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ (D) $\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3}$

15. Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = T_2^{g,0}$, pak $f = g$?
16. Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = 1 + x - x^2$, pak je f konkávní na okolí 0?
17. Který Taylorův polynom bude vhodný k aproximaci hodnoty $\sin 3$, nemáte-li kalkulačku?

    (A) $x - \frac{1}{3}x^3$
    (B) $1 - \frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2$
    (C) $-(x - \pi) + \frac{1}{3!}(x - \pi)^3$
    (D) $\sin(3) - \frac{1}{3!}\sin(3)(x - 3)^3$

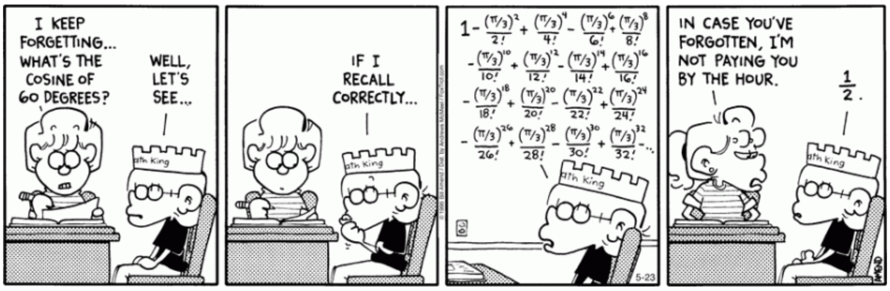

Figure 1: https://www.gocomics.com/foxtrotclassics/2018/05/23

- (6c) Užijte geometrickou řadu a násobení.
- (6d) Užijte geometrickou řadu, umocněte, vynásobte.
- (6e) Rozvinte a použijte geometrickou řadu.
- (6j) Metoda neurčitých koeficientů.