Souhrn teorie

Věta 1 (Levi)**.** Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in S$, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ a $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Pak
$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 2 (Lebesgue)**.** Nechť f a $\{f_n\}$ jsou měřitelné funkce na $D \in S$, Nechť posloupnost $\{f_n\}$ konverguje skoro všude k f. Nechť existuje integrovatelná funkce g (majoranta) tak, že
$$|f_n(x)| \leq |g(x)|, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad x \in D.$$
Potom
$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 3 (Záměna řady a integrálu)**.** Nechť $D \in \mathbb{S}$ a g_j, $j = 1, 2, \dots$ jsou měřitelné funkce na D. Předpokládejme, že je splněna aspoň jedna z následujících podmínek:

(a) $g_j = aq^j$, kde a, q jsou měřitelné funkce, $|q| < 1$, a $\int_D \frac{a}{1-q}\, d\mu$ konverguje (geometrická řada),

(b) $\sum_j \int_D |g_j| \, d\mu < \infty$,

(c) $\int_D \sum_j |g_j| \, d\mu < \infty$,

(d) $g_j = (-1)^j h_j$, $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq \cdots \geq 0$, $h_j \to 0$, h_1 je integrovatelná (alternující řada).

Potom řada $\sum_j g_j$ konverguje skoro všude a platí vzorec $\displaystyle\int_D \sum_j g_j \, d\mu = \sum_j \int_D g_j \, d\mu$,

Věta 4 (Leviho pro řady)**.** Nechť $D \in S$ a g_j, $j = 1, 2, \dots,$ jsou nezáporné měřitelné funkce na D. Potom
$$\int_D \sum_j g_j = \sum_j \int_D g_j$$

Věta 5 (Limita integrálu závislého na parametru)**.** Nechť P je metrický prostor a $A \subset P$. Buď $a \in \overline{A} \setminus A$. Nechť funkce $f : A \times D \to \bar{\mathbb{R}}$ má následující vlastnosti:

(Li-1) Pro skoro všechna $x \in D$ existuje $\displaystyle\lim_{\alpha\to a,\, \alpha\in A} f(\alpha, x)$.

(Li-2) pro všechna $\alpha \in A$ je funkce $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná,

(Li-3) existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $\alpha \in A$ a $x \in D$ je $|f(\alpha, x)| \leq g(x)$.

Potom $\displaystyle\int_D \lim_{\alpha\to a,\, \alpha\in A} f(\alpha, x) \, d\mu(x) = \lim_{\alpha\to a,\, \alpha\in A} \int_D f(\alpha, x) \, d\mu(x)$. (Speciálně výrazy vyskytující se výše mají smysl.)

Věta 6 (Spojitost integrálu závislého na parametru)**.** Nechť P je metrický prostor. Buď $a \in P$ a U okolí bodu a v P. Nechť funkce $f : U \times D \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:

(Sp-1) Pro skoro všechna $x \in D$ je funkce $f(\cdot, x)$ spojitá v a,

(Sp-2) pro všechna $\alpha \in U$ je funkce $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná,

(Sp-3) existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $\alpha \in U$ a $x \in D$ je $|f(\alpha, x)| \leq g(x)$.

Potom pro všechna $\alpha \in U$ je $f(\alpha, \cdot)$ integrovatelná a funkce

$$F : \alpha \mapsto \int_D f(\alpha, x)\, d\mu(x)$$

je spojitá v bodě a.

Věta 7 (Derivace integrálu závislého na parametru)**.** Nechť $(X, \mathbb{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $f : I \times D \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:

(De-1) Pro skoro všechna $x \in D$ je funkce $f(\cdot, x)$ diferencovatelná na I,

(De-2) pro všechna $\alpha \in I$ je funkce $f(\alpha, \cdot)$ měřitelná,

(De-3) existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $\alpha \in I$ a $x \in D$ je

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x) \right| \leq g(x),$$

(De-4) existuje $\alpha_0 \in I$ tak, že $f(\alpha_0, \cdot)$ je integrovatelná na D.

Potom pro všechna $\alpha \in I$ je $f(\alpha, \cdot)$ integrovatelná na D, funkce $F : \alpha \mapsto \int_D f(\alpha, x)\, d\mu(x)$ je diferencovatelná na I a platí vzorec

$$F'(\alpha) = \int_D \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x)\, d\mu(x)\,.$$

Věta 8 (Fubiniova)**.** Nechť $(X, \mathbb{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ a ν jsou úplné a σ-konečné. Buď $(\mathbb{R}, \rho)$ součin měr μ a ν a $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\rho})$ jejich úplný součin. Nechť f je $\overline{\rho}$-měřitelná funkce na $\overline{\rho}$-měřitelné množině $M \subset X \times Y$. Předpokládejme, že integrál $\displaystyle\int_M f(x, y)\, d\overline{\rho}(x, y)$ má smysl. Potom pro μ-skoro všechna x má smysl integrál

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x, y)\, d\nu(y),$$

funkce g má integrál

$$\int_X g\, d\mu$$

a

$$\int_M f(x, y)\, d\overline{\rho}(x, y) = \int_X g\, d\mu = \int_X \Big(\int_{M^{x,*}} f(x, y)\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x).$$