x, y. Symboly dx, dy na pravých stranách ukazují, „podle které proměnné zrovna integrujeme". V prvním případě tedy funkci $f(x, y)$ integrujeme nejdříve podle y při pevném, ale libovolném $x \in M_{p\leftarrow}$ přes příslušnou množinu $M(x, \cdot)$ a výsledky těchto integrací pak zintegrujeme podle x přes průmět $M_{p\leftarrow}$ množiny M do $\mathbb{R}^p$.

Podobně lze samozřejmě popsat dvojnásobnou integraci i ve druhém případě; vymění se jen x a y.

POZOR VŠAK! *Pro platnost rovností* (122_1) a (122_2) *je (v obou případech) podstatné, že existuje integrál vlevo; existence integrálů vpravo nestačí!*

Protipříklad

Příklad 19.6. Položme

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \tag{123}$$

a vypočítejme oba dvojnásobné integrály přes otevřený čtverec $M := (0, 1) \times (0, 1)$. Snadno zjistíme, že

$$\int_0^1 f(x, y)\, dy = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \int_0^1 f(x, y)\, dx = -\frac{1}{1 + y^2}; \tag{124}$$

z toho je patrné, že

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\, dy \Big) dx = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\, dx \Big) dy = -\frac{\pi}{4}. \tag{125}$$

Protože dvojnásobné integrály mají různé hodnoty, dvojný integrál neexistuje.

Tento velice jednoduchý příklad (v němž je integrand racionální funkce dvou proměnných, spojitá v integračním oboru) by proto měl být důrazným varováním – předpoklady aplikovaných vět se vyplácí ověřovat! [19]) „Prakticky" je ovšem třeba dát pozor jen na integraci funkcí měnících znaménko, protože integrál z měřitelné nezáporné (resp. nekladné) funkce přes měřitelnou množinu existuje vždy.

Cvičení 19.17. Dokažte (přímým výpočtem), že dvojný integrál z předcházejícího příkladu neexistuje proto, že integrand je v otevřeném trojúhelníku s vrcholy (0,0), (1,0), (1,1) kladný, přičemž příslušný integrál je roven $+\infty$, zatímco integrál přes otevřený trojúhelník s vrcholy (0,0), (0,1), (1,1), v němž je integrand záporný, je roven $-\infty$. (Důsledek: $\int_M f^+ = \int_M f^- = +\infty$.)

[19]) Vzpomínám si, že kdysi dávno skupina vysokoškolských učitelů, uctívačů (bezduchého) kalkulu, diskutovala o otázce, čemu že se vlastně v tomto případě rovná integrál funkce f přes M: Prvnímu, nebo druhému výsledku ze (125), nebo snad jejich aritmetickému průměru? Nezbývá než doufat, že se podobné „problémy" již na vysokých školách neřeší. V současné době je však třeba *dát pozor při integraci pomocí počítačových programů*, protože např. dvojná integrace se v nich nahrazuje dvojnásobnou; omezíme-li se tedy např. na první z integrálů (125), ujde nám, že druhý se mu nerovná, a nezjistíme, že dvojný integrál vůbec neexistuje. Je to ovšem ještě daleko horší: *Ani když se oba dvojnásobné integrály nějaké funkce rovnají* 0, *neplyne z toho existence integrálu dvojného!* (Stačí zvolit funkci $f(x, y) \cdot \operatorname{sgn} x$ místo funkce (123) a integrovat přes $(-1, 1) \times (0, 1)$.)

dle x

$$\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2} - 2y^2\,\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{y^2\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)} - \frac{2y^2}{y^4\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{y^2}\arctan\frac{x}{y}\cdot y\right]_{x=0}^{1} - \left[\frac{2}{y^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{y}\cdot y + \frac{\frac{x}{y}}{2\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)}\cdot y\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{y}\arctan\frac{1}{y} - \frac{2}{y^2}\left(\frac{y}{2}\arctan\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{y^2}+1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{1+y^2}$$

dle y $\quad \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$ a pak stejným postupem.