

14. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>, kunck6am@natur.cuni.cz

Příklady

Vzorová písemka

1. Rozviňte v řadu integrál

$$\int_0^{\infty} \cos x \ln(1 + e^{-x}) dx.$$

2. Spočtěte míru mny $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z\sqrt{x^2 + y^2} < 2, \sqrt{x^2 + y^2} < z + 1, z > 0\}$

3. Spočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin \frac{x}{n} dx.$$

4. Spočtěte integrál

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-a^2 x^2}}{x^2} dx.$$

5. Spočtěte integrál

$$\int_M \frac{x dx dy dz}{x^2 + y^2},$$

kde $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 < xz < x^2 + y^2 < 1, z > 0\}$.

6. Spočtěte integrál

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 + ax^2)}{x^2(1 + x^2)} dx.$$

Příklady z minula

7. $\int_M x^2 + y^2 + z^2 d\lambda$, kde M je $\frac{x^2 + y^2}{2} < z < \sqrt{3 - (x^2 + y^2)}$.

8. Spočtěte míru množiny: $x^2 + y^2 < 2 - z$; $x^2 + y^2 + z^2 < 2z$.

9. Spočtěte míru množiny: $8x^2 + 2y^2 < z < 4 - 8x^2 - 2y^2$.

Opakování

10. $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1 + a^2 x^2) - \ln(1 + b^2 x^2)}{x^2} dx$

11. $F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2 e^{x^2}} dx, \quad \alpha \in [-1, \infty)$

Hint: $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/\alpha}$

12. Rozviňte do řady $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1 + e^x} dx$

13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2 x^2} dx$

14. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, (tzv. Gamma funkce) je spojitá v intervalu $(0, \infty)$.

