

2a

$$\int_H \sin \sqrt{x^2 + y^2} \, dA$$

$$4^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$$

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$$

$$\alpha \in [-\pi, \pi]$$

$$r \in [4, 2\pi]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_4^{2\pi} \sin \sqrt{r^2} \cdot r \, dr \, d\alpha =$$

$$\int_4^{2\pi} \underbrace{t}_{u'} \sin t \, dt = -\underbrace{t}_{u'} \cos t + \int \cos t = -t \cos t + \sin t$$

$$u'=1 \quad r = -\cos t$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[-r \cos t + \sin r \right]_{\pi}^{2\pi} d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} -2\pi + (-\pi) d\alpha =$$

$$= -3\pi \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha = -\underline{\underline{6\pi^2}}$$

25

$$\int_M \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dA$$

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq e, \quad y \geq 0$$

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$$

$$1 \leq r^2 \leq e$$

$$r \geq 0$$

$$r \sin \alpha \geq 0$$

$$\sin \alpha \geq 0$$

$$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}, \pi]$$

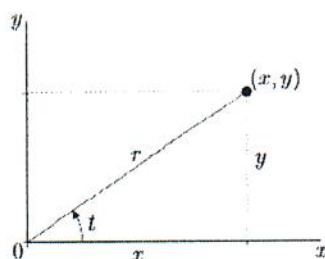
$$\int_0^{\pi} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln r^2}{r^2} \cdot r \, dr \, d\alpha = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{4} \ln^2 r^2 \right]_1^{\sqrt{e}} dr =$$

$$\int \frac{\ln r^2}{r^2} \cdot r \, dr = \int \frac{1}{2} \frac{\ln t}{t} dt = \int \frac{1}{2} z \, dz$$

$$\begin{aligned} t &= r^2 \\ dt &= 2r \, dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= \ln t &= \frac{1}{4} z^2 \\ dz &= \frac{1}{t} dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{4} d\alpha = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$



Přímým výpočtem zjistíme, že

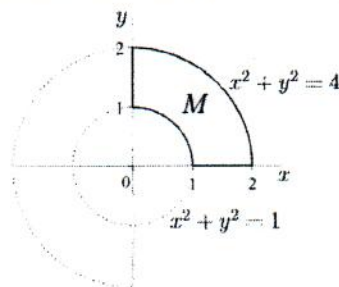
$$J(r, t) = \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{vmatrix} = r \cos^2 t + r \sin^2 t = r.$$

Poznámka 1.35. Tuto substituci lze zpravidla s úspěchem aplikovat v případech, že hranice množiny M , přes kterou integrujeme, obsahuje části kružnic. Vhodnost této substituce však také závisí na integrované funkci.

Příklad 1.36. Vypočtěte integrál $I = \iint_M x \, dx \, dy$, kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Řešení. Množina M je čtvrtina mezikružší se středem v počátku a s poloměry 1 a 2.



Bude proto vhodné zavést polární souřadnice

$$\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t \end{cases} \quad (J(r, t) = r).$$

Pokusíme se tedy množinu M popsat v těchto nových souřadnicích. Vzhledem ke geometrickému významu proměnné t snadno dostaneme první omezení $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Nyní si představme, že úhel t je zafixován a zkoumejme, jak se může měnit r (vzdálenost od počátku). Z obrázku vidíme, že $1 \leq r \leq 2$. Proto platí

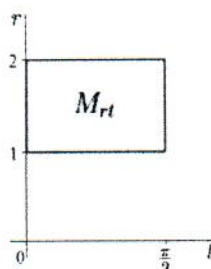
$$M = \{(r \cos t, r \sin t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \wedge 1 \leq r \leq 2\}. \quad (1.2)$$

Položme

$$\Omega_{rt} = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$$

a

$$M_{rt} = \{(r, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \wedge 1 \leq r \leq 2\}.$$



Věta 1.30 (s využitím poznámky 1.33) dává

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r \cos t \cdot \underbrace{J(r, t)}_r dr \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r^2 \cos t dr \right) dt = \\
 &= \left(\int_1^2 r^2 dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \right) = \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \cdot [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{3}.
 \end{aligned}$$

▲

Poznámka 1.37. Pokud bychom omezení (1.2) nedokázali sestavit na základě obrázku, museli bychom ho získat výpočtem – a to tak, že transformační vztahy

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

dosadíme do nerovností, jimiž je množina M zadána. Přitom přihlídneme k tomu, že $r \geq 0$ a $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

V našem případě bychom dostali

$$r \cos t \geq 0, \quad r \sin t \geq 0 \quad \text{a} \quad 1 \leq \underbrace{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t}_{r^2} \leq 4.$$

Z poslední podmínky (a $r \geq 0$) získáme $1 \leq r \leq 2$ a z prvních dvou poté dostaneme $\cos t \geq 0$ a $\sin t \geq 0$, odkud (vzhledem k $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$) plyne, že t leží v prvním kvadrantu, tj. $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.



Příklad 1.38. Vypočtěte integrál $I = \iint_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx dy$, kde

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 2x \wedge x \leq x^2 + y^2 \leq 3x \right\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Řešení.

křivkou stačí počítat obsah pouze té části M , která leží v prvním kvadrantu a výsledek násobit čtyřmi. Pro výpočet integrálu použijeme substituci do polárních souřadnic. Dosazením (4) do nerovnice určující M dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, \\ 0 &\leq r^4 \leq r^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi), \\ (7) \quad 0 &\leq r \leq \sqrt{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi} = \sqrt{\cos 2\phi}. \end{aligned}$$

Z podmínky (7) dostáváme $0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\phi}$ a dále

$$(8) \quad \cos 2\phi \geq 0, \quad \text{tj.} \quad \phi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right).$$

Podle předpokladu počítáme obsah pouze té části M , pro kterou je $x \geq 0$ a $y \geq 0$, tj.

$$\cos \phi \geq 0 \wedge \sin \phi \geq 0 \Rightarrow \phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Spolu s (8) tedy dostáváme $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Potom

$$\mu(M) = \int_M dA = 4 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\phi}} r dr \right) d\phi = 2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\phi d\phi = 1.$$

Příklad 1.27. Vypočítejme dvojný integrál

$$\int_M (x^2 + y^2) dA,$$

kde $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$.

Řešení: Protože v tomto případě je množina M ohraničená elipsou (Obr. 11), bude výhodné použít substituci pomocí zobecněných polárních souřadnic

$$(9) \quad x = ar \cos \phi, \quad y = br \sin \phi \quad \text{a} \quad J = abr,$$

V zobrazení (9) (uvažovaném na množině $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$) má elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ rovnici $r = 1$.

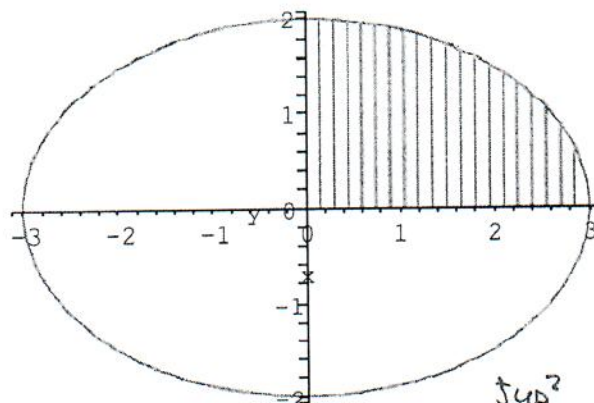
Při výpočtu integrálu opět stačí, budeme-li integrovat pouze přes část M , která leží v prvním kvadrantu. Použitím substituce (9), kde $a = 3$, $b = 2$, tj.

$$x = 3r \cos \phi, \quad y = 2r \sin \phi \quad \text{a} \quad J = 6r,$$

a dosazením do M (za podmínky $x \geq 0$, $y \geq 0$) dostaneme

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

(2d)



Obr. 11

$$5u^2 + \underbrace{4u^2 + 4u^2}_4$$

Odtud

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \int_M (x^2 + y^2) \, dA = 4 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 (9r^2 \cos^2 \phi + 4r^2 \sin^2 \phi) 6r \, dr \right) d\phi = \\ &= 6 \int_0^{\pi/2} (9 \cos^2 \phi + 4 \sin^2 \phi) d\phi = \underline{\underline{\frac{39}{2} \pi}}. \end{aligned}$$

Příklad 1.28. Vypočítejme obsah části kuželové plochy $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, kterou z ní vytne parabolický válec $z^2 = 2x$ (Obr. 12).

Řešení: Víme, že pro obsah S plochy P , která je částí grafu funkce $z = f(x, y)$, $(x, y) \in M$ platí

$$(10) \quad S = \int_M \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dA.$$

V našem případě je plocha částí grafu funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Hranici množiny M najdeme jako (pravoúhlý) průmět průniku ploch $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $z^2 = 2x$ do roviny $z = 0$

$$\sqrt{2x} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{tj.} \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = 0.$$

Je tedy

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Množina M je tedy kruh se středem v bodě $(1, 0)$ a poloměrem 1. Dále je

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

12

$$\iint_H \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

$$H = \{ [x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 < x \}$$

$$x = r \cos \alpha$$

$$\varphi(r, \alpha) \mapsto (x, y)$$

$$y = r \sin \alpha$$

$$\alpha \in (0, 2\pi)$$

$$r \in (0, \infty)$$

$$\varphi: (0, 2\pi) \times (0, \infty) \rightarrow$$

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{ [0, \infty) \times \{0\} \}$$

$$\text{Higino: } \alpha \in (-\pi, \pi)$$

$$J_{\varphi}(r, \alpha) = r$$

$$\varphi^{-1}(H): 0 < r^2 < r \cos \alpha$$

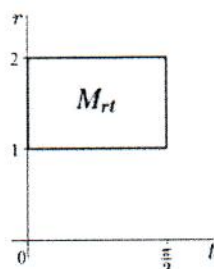
$$0 < r < \cos \alpha$$

$$\rightarrow \cos \alpha > 0 \rightarrow \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\varphi^{-1}(H) = [r, \alpha] \in \mathbb{R}^2, r \in (0, \cos \alpha), \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\iint_H \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \iint_{\varphi^{-1}(H)} \frac{1}{\sqrt{r^2}} \cdot r dr d\alpha =$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos \alpha} 1 dr d\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \underline{\underline{2}}$$



řeta 1.30 (s využitím poznámky 1.33) dává

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r \cos t \cdot \underbrace{J(r, t)}_r dr \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r^2 \cos t dr \right) dt = \\
 &= \left(\int_1^2 r^2 dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \right) = \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \cdot [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{3}.
 \end{aligned}$$

▲

Poznámka 1.37. Pokud bychom omezení (1.2) nedokázali sestavit na základě ob-
rázku, museli bychom ho získat výpočtem – a to tak, že transformační vztahy

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

dosadíme do nerovností, jimiž je množina M zadána. Přitom přihlédneme k tomu, že $r \geq 0$ a $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

V našem případě bychom dostali

$$r \cos t \geq 0, \quad r \sin t \geq 0 \quad \text{a} \quad 1 \leq \underbrace{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t}_{r^2} \leq 4.$$

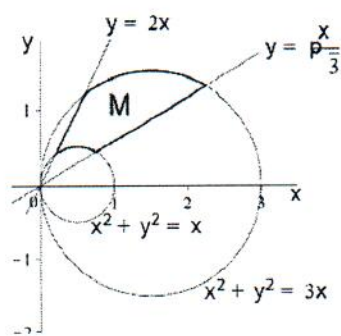
Z poslední podmínky (a $r \geq 0$) získáme $1 \leq r \leq 2$ a z prvních dvou poté dostaneme $\cos t \geq 0$ a $\sin t \geq 0$, odkud (vzhledem k $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$) plyne, že t leží v prvním kvadrantu, tj. $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.



Příklad 1.38. Vypočtěte integrál $I = \iint_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx dy$, kde

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 2x \wedge x \leq x^2 + y^2 \leq 3x \right\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Řešení.



Provedeme transformaci do polárních souřadnic. Protože pro každé $(x, y) \in M$ platí $x > 0$ a $y > 0$, ze vztahů $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ (a $r \geq 0$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$) plyne $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ a $r > 0$. Z podmínky $\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 2x$ plyne

$$\frac{r \cos t}{\sqrt{3}} \leq r \sin t \leq 2r \cos t,$$

odkud

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \operatorname{tg} t \leq 2,$$

tj. $t \in \langle \frac{\pi}{6}, \operatorname{arctg} 2 \rangle$. Podobně, z podmínky $x \leq x^2 + y^2 \leq 3x$ obdržíme

$$r \cos t \leq \underbrace{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t}_{r^2} \leq 3r \cos t,$$

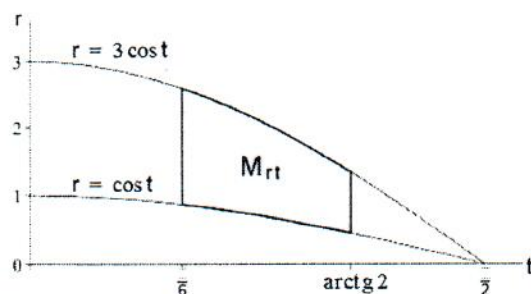
což dává nerovnost $\cos t \leq r \leq 3 \cos t$.

Položme

$$\Omega_{rt} = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$$

a

$$M_{rt} = \{(r, t) \in \mathbb{R}^2: t \in \langle \frac{\pi}{6}, \operatorname{arctg} 2 \rangle \wedge \cos t \leq r \leq 3 \cos t\}.$$



Podle věty 1.30 a Fubiniovy věty 1.22 máme

21

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \left(\int_{\cos t}^{3 \cos t} \frac{1}{(r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t)^2} \cdot r \, dr \right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \left(\int_{\cos t}^{3 \cos t} \frac{1}{r^3} \, dr \right) dt = \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \left[-\frac{1}{2r^2} \right]_{r=\cos t}^{3 \cos t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{9 \cos^2 t} - \frac{1}{\cos^2 t} \right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \\
 &= \frac{4}{9} [\operatorname{tg} t]_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} = \frac{4}{9} \left(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4}{9} \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{8}{9} - \frac{4\sqrt{3}}{27}.
 \end{aligned}$$

Domácí cvičení 1.39. Pokuste se na omezení

$$t \in \left(\frac{\pi}{6}, \operatorname{arctg} 2 \right) \quad \text{a} \quad \cos t \leq r \leq 3 \cos t$$

z předchozího příkladu přijít pouze na základě geometrické úvahy.

1.4.4 Substituce do zobecněných polárních souřadnic

Tentokrát uvažujme substituci

$$x = a \cdot r \cos t,$$

$$y = b \cdot r \sin t,$$

kde $a, b > 0$ jsou konstanty, $r \geq 0$ a $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (popř. $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$ nebo $t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$).

Přímým výpočtem opět zjistíme

$$J(r, t) = \begin{vmatrix} a \cos t & -ar \sin t \\ b \sin t & br \cos t \end{vmatrix} = ab \cdot r \cos^2 t + ab \cdot r \sin^2 t = ab \cdot r.$$

Poznámka 1.40. Substituci do zobecněných polárních souřadnic zpravidla používáme, pokud hranice oblastí, přes kterou integrujeme, má eliptický tvar (a, b jsou poloosy zmíněné elipsy).



Příklad 1.41. Vypočtěte integrál $\iint_M (x - 2y) \, dx \, dy$, kde

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq \sqrt{12} \cdot y \right\}.$$

Řešení

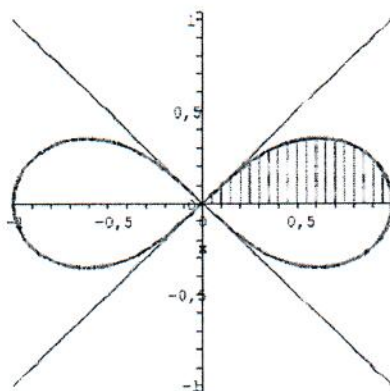
postupně dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq r^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \leq r(\cos \phi + \sin \phi), \\ 0 &\leq r \leq (\cos \phi + \sin \phi). \end{aligned}$$

Z podmínky $0 \leq r \leq \cos \phi + \sin \phi$ pak plyne $-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}$. Odtud

$$\begin{aligned} \int_M (x+y) dA &= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_0^{\cos \phi + \sin \phi} (r^2(\cos \phi + \sin \phi)) dr \right) d\phi = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\cos \phi + \sin \phi)^4 d\phi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

V tomto případě je však výpočet posledního integrálu složitější než při substituci (6).



Obr. 10

Příklad 1.26. Vypočítejte obsah množiny M , která je ohraničená lemniskátou $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ (Obr. 10).

Řešení: Pro obsah množiny M platí

$$\mu(M) = \int_M dA,$$

kde v našem případě je

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2\}.$$

Z rovnice lemniskáty je vidět, že tato křivka je symetrická podle osy x i podle osy y (je sudá v obou proměnných). Při výpočtu obsahu plochy ohraničené touto

24.

2g
 křivkou stačí počítat obsah pouze té části M , která leží v prvním kvadrantu a výsledek násobit čtyřmi. Pro výpočet integrálu použijeme substituci do polárních souřadnic. Dosazením (4) do nerovnice určující M dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, \\ 0 &\leq r^4 \leq r^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi), \\ (7) \quad 0 &\leq r \leq \sqrt{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi} = \sqrt{\cos 2\phi}. \end{aligned}$$

Z podmínky (7) dostáváme $0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\phi}$ a dále

$$(8) \quad \cos 2\phi \geq 0, \quad \text{tj.} \quad \phi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right).$$

Podle předpokladu počítáme obsah pouze té části M , pro kterou je $x \geq 0$ a $y \geq 0$, tj.

$$\cos \phi \geq 0 \wedge \sin \phi \geq 0 \Rightarrow \phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Spolu s (8) tedy dostáváme $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Potom

$$\mu(M) = \int_M dA = 4 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\phi}} r \, dr \right) d\phi = 2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\phi \, d\phi = 1.$$

Příklad 1.27. Vypočítejme dvojný integrál

$$\int_M (x^2 + y^2) \, dA,$$

$$\text{kde } M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

Řešení: Protože v tomto případě je množina M ohraničená elipsou (Obr. 11), bude výhodné použít substituci pomocí zobecněných polárních souřadnic

$$(9) \quad x = ar \cos \phi, \quad y = br \sin \phi \quad \text{a} \quad J = abr,$$

V zobrazení (9) (uvažovaném na množině $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$) má elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ rovnici $r = 1$.

Při výpočtu integrálu opět stačí, budeme-li integrovat pouze přes část M , která leží v prvním kvadrantu. Použitím substituce (9), kde $a = 3$, $b = 2$, tj.

$$x = 3r \cos \phi, \quad y = 2r \sin \phi \quad \text{a} \quad J = 6r,$$

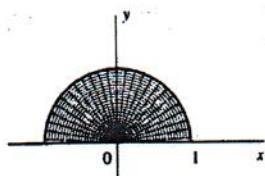
a dosazením do M (za podmínky $x \geq 0$, $y \geq 0$) dostaneme

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

III.4. Substituční metoda pro dvojný integrál

Příklad 300. Rozhodněte, zda integrál $\iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy$, kde $D = \{[x, y] \in E_2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ existuje a v kladném případě jej spočítejte.

Řešení :



Funkce $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ je nespojitá na ose y (tj. $x = 0$). Nicméně, množina D je měřitelná a funkce f je na D omezená, neboť $|\operatorname{arctg} \frac{y}{x}| \leq \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x, y] \in E_2$. Proto daný integrál existuje. Víme, že

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{B(u, v)} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.$$

Zde použijeme transformaci do polárních souřadnic.

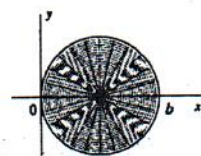
$$\begin{aligned} \iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy &= \left[\begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \end{array} \mid \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{array} \right] = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \varphi \cdot r dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 r dr = \left[\frac{\varphi^2}{2} \right]_0^\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

• Vypočítejte integrály :

Příklad 301. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $D = \{[x, y] \in E_2 : x^2 + y^2 - bx \leq 0\}$, $b > 0$

Řešení :

$$D : \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{b^2}{4}$$



$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \left[\begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ J = r \end{array} \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq bx \rightarrow r^2 \leq br \cos \varphi \\ 0 \leq r \leq b \cos \varphi \rightarrow \cos \varphi \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{b \cos \varphi} r \cdot r dr \right) d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{b \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} b^3 \cos^3 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{2}{3} b^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{2}{3} b^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4}{9} b^3. \end{aligned}$$

Příklad 302. $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$, $D : x^2 + y^2 \leq a^2, x \leq 0$

Řešení :

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}}$, $y = \sqrt[3]{uv}$ a spočítáme Jakobián. Pro výpočet Jakobiánu použijeme předchozí poznámku. Je tedy

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{y}{x^2} \frac{x}{y} = -\frac{3y^2}{x}.$$

Dosazením za $x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}}$, $y = \sqrt[3]{uv}$ pak dostáváme $J(x(u, v), y(u, v)) = 3v$. Odtud pak

$$J(u, v) = \frac{1}{3v}.$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $J = \frac{1}{3v}$ dostaneme

$$\int_M \frac{y^3}{x^3} dA = \int_2^3 \int_1^2 \frac{1}{3} \frac{u}{v} dv du = \frac{5 \ln 2}{6}.$$

Příklad 1.24. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M \sqrt{x^2 + y^2} dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$.

Řešení: Při výpočtu tohoto integrálu použijeme substituci do polárních souřadnic

$$(4) \quad x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \quad \text{a} \quad J = r.$$

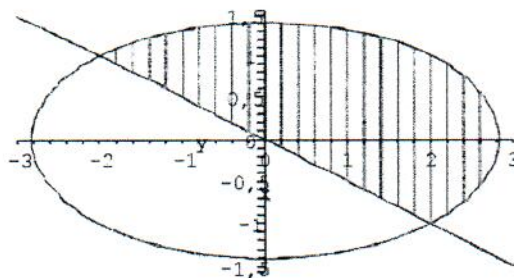
V našem případě je M (Obr. 7) obrazem obdélníku $N = \langle 1, 2 \rangle \times \langle \pi/4, \pi/3 \rangle$ jak zjistíme dosazením za x a y z (4) do nerovnic popisujících množinu M

$$\begin{aligned} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, & & x \leq y \leq \sqrt{3}x, \\ 1 \leq r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi \leq 4, & & r \cos \phi \leq r \sin \phi \leq \sqrt{3}r \cos \phi, \\ 1 \leq r \leq 2, & & 1 \leq \tan \phi \leq \sqrt{3}, \\ & & \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Použitím věty o substituci ve dvojném integrálu a Fubiniovy věty pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int_M \sqrt{x^2 + y^2} dA &= \int_N \sqrt{r^2} r dA^{\text{u}} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_1^2 r^2 dr d\phi = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 d\phi = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{7}{3} d\phi = \frac{7}{36} \pi. \end{aligned}$$

Příklad 1.25. Vypočítejte objem tělesa, které je chráněno plochami $x^2 + y^2 = x + y$, $z = x + y$ a $z = 0$.



Obr. 6

Řešení: Množina M je dána nerovnicemi

$$x \leq y \leq x + 1 \wedge 1 - x \leq y \leq 2 - x,$$

tj.

$$(1) \quad 0 \leq y - x \leq 1 \wedge 1 \leq y + x \leq 2.$$

Zvolme nyní substituci $u = y - x$ a $v = y + x$. Dosazením u a v do (1) dostaneme

$$0 \leq u \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq v \leq 2.$$

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \frac{1}{2}(v - u)$ a $y = \frac{1}{2}(v + u)$ a spočítáme Jakobián.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $J = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\int_M 4xy \, dA = \int_1^2 \int_0^1 (v - u)(u + v) \frac{1}{2} \, du \, dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_0^1 (v^2 - u^2) \, du \, dv = 1.$$

Příklad 1.22. Vypočítejme dvojný integrál

$$\int_M x^2 y^2 \, dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x} \wedge x \leq y \leq 2x\}$.

Řešení: Množina M je dána nerovnicemi

$$\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x} \wedge x \leq y \leq 2x,$$

tj.

$$(2) \quad 1 \leq xy \leq 3 \wedge 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2.$$

Zvolme nyní substituci $u = xy$ a $v = \frac{y}{x}$. Dosazením u a v do (3) dostaneme

$$1 \leq u \leq 3 \quad \wedge \quad 1 \leq v \leq 2.$$

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ a $y = \sqrt{uv}$ a spočítáme Jakobián.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2} \frac{u}{v^2} \\ \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{uv}} & \frac{1}{2} \frac{u}{\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $J = \frac{1}{2v}$ dostaneme

$$\int_M x^2 y^2 dA = \int_1^3 \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{u^2}{v} dv du = \frac{13 \ln 2}{2}.$$

Poznámka: Při řešení předchozího příkladu byl asi nejpracnější výpočet Jakobiánu. Při jeho výpočtu jsme si ale mohli usnadnit práci, kdybychom využili vlastosti regulárního zobrazení a zobrazení k němu inverzního. Platí totiž

$$J(u, v) = \frac{1}{J(x(u, v), y(u, v))}.$$

Pro $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ je tedy

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x}.$$

Dosazením za $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ a $y = \sqrt{uv}$ pak dostáváme $J(x(u, v), y(u, v)) = 2v$. Odtud pak

$$J(u, v) = \frac{1}{2v}.$$

Příklad 1.23. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M \frac{y^3}{x^3} dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2}{x} \leq y \leq \frac{3}{x} \wedge x \leq y^2 \leq 2x\}$.

Řešení: Množina M je dána nerovnicemi

$$\frac{2}{x} \leq y \leq \frac{3}{x} \wedge x \leq y^2 \leq 2x,$$

tj.

$$(3) \quad 2 \leq xy \leq 3 \wedge 1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 2.$$

Zvolme nyní substituci $u = xy$ a $v = \frac{y^2}{x}$. Dosazením u a v do (3) dostaneme

$$2 \leq u \leq 3 \wedge 1 \leq v \leq 2.$$

11. ověřit, ~~že~~ příklad

pauzírka se substituace

$$u = xy \quad \text{a} \quad v = \frac{y}{x} \quad \text{ke} \quad 1 \leq u \leq 3 \quad 1 \leq v \leq 2$$

resp.

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}} \quad \text{a} \quad y = \sqrt{uv}$$

Ověření regularity:

$$J_{\varphi} : \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{v}} & \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2} \\ \sqrt{v} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{u} \cdot \frac{1}{\sqrt{v}} \cdot \frac{(-1)}{2} \\ \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{v}} + \frac{1}{4} \frac{1}{v} = \frac{1}{2v} \neq 0$$

↑

$v > 0$

$$\varphi(u, v) : \overbrace{[1, 3] \times [1, 2]}^M \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(u, v) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right)$$

$$J_{\varphi} = \frac{1}{2v} \neq 0 \quad \text{na } M \quad (\text{a ne jinde dle -dolu}).$$

✓ pare. dle φ jsou spjaté křivky.

$$\text{Je } \varphi \text{ prosté?} \quad \text{máme } \varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2) \Rightarrow u_1 = u_2, v_1 = v_2$$

$$\text{máme} \quad \sqrt{\frac{u_1}{v_1}} = \sqrt{\frac{u_2}{v_2}} \quad \text{a} \quad \sqrt{u_1 v_1} = \sqrt{u_2 v_2}$$

nebo + kladně

1. $\sqrt{v_1^2}$

$$\sqrt{u_1 v_1} = \sqrt{\frac{u_2 v_1^2}{v_2}} = \sqrt{u_2 v_2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{v_1^2} = \sqrt{v_2^2}$$

$\Rightarrow \varphi$ prosté

$$\text{máme pak } \sqrt{u_1} = \sqrt{u_2}$$

na dle M.

Nyní máme dokázáno tvrzení v případě nezáporné funkce f . Je-li f obecná, napíšeme ji jako rozdíl kladné a záporné části, $f = f_+ - f_-$, kde

$$f_+ = \max\{f, 0\}, \quad \text{a} \quad f_- = \max\{-f, 0\}.$$

Aplikací již dokázaného tvrzení na (nezáporné) funkce f_+ a f_- dostaneme obecný případ. $\square$

Poznámka 3.13. Předpoklady ve Větě 3.12 bychom mohli zeslabit na to, že funkce f může být spojitá jen na vnitřku $\Phi(T)$ a transformace Φ by stačila být třídy C^1 na vnitřku T . Použili bychom stejný „nafukovací princip“ pro vyplnění množin T a $\Phi(T)$ jako na konci Kapitoly 2, viz (2.11).

Ještě než přikročíme k příkladům, vrátíme se na chvíli na začátek této kapitoly. Zavedli jsme tam polární souřadnice a protože poměrně často se s výhodou používají, vypočteme si jejich jakobián. Přejít k polárním souřadnicím reprezentuje zobrazení

$$\Phi(\varrho, \varphi) = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \varrho \geq 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi).$$

Jacobiho matice je pak

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varrho} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varrho} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Odtud jakobián

$$\Delta_\Phi = \det J_\Phi = \varrho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \varrho.$$

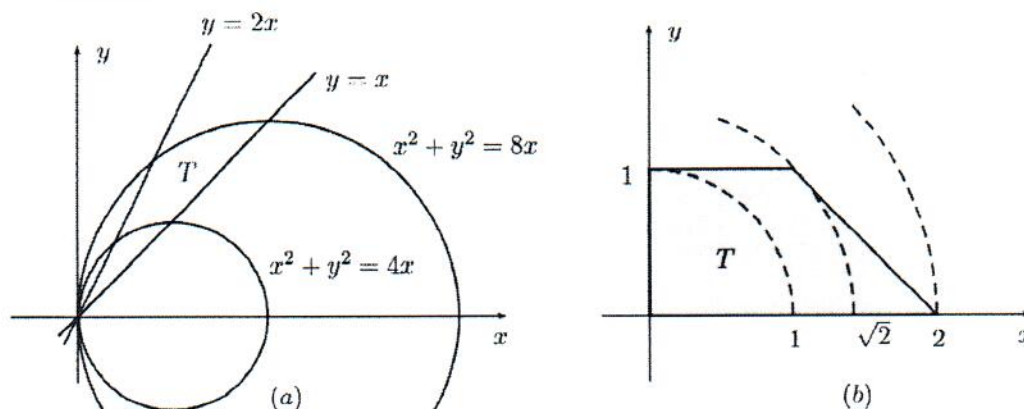
3 Cvičení.

Úloha. Vypočtete integrál

$$\iint_T \frac{1}{(x^2 + y^2)^2},$$

kde T je množina omezená křivkami $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$, $y = x$ a $y = 2x$.

Řešení. Množina T má tvar ukázaný na obr. 3.6(a).



Obr. 3.6.

Přejdeme-li k polárním souřadnicím $x = \varrho \cos \varphi$ a $y = \varrho \sin \varphi$, pak integrovaná funkce bude mít tvar

$$f = \frac{1}{(\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi)^2} = \frac{1}{\varrho^4}.$$

Stejně tak rovnice křivek omezující množinu T budou mít v polárních souřadnicích vyjádření

$$\begin{aligned} \varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi &= 4\varrho \cos \varphi & \text{tj. } \varrho &= 4 \cos \varphi \\ \varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi &= 8\varrho \cos \varphi & \text{tj. } \varrho &= 8 \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi &= \varrho \cos \varphi & \text{tj. } \operatorname{tg} \varphi &= 1 \\ \varrho \sin \varphi &= 2\varrho \cos \varphi & \text{tj. } \operatorname{tg} \varphi &= 2 \end{aligned}$$

Množina T je tak v polárních souřadnicích určena požadavky $\varphi \in \langle \arctg 1, \arctg 2 \rangle = \langle \pi/4, \arctg 2 \rangle$ a $\varrho \in \langle 4 \cos \varphi, 8 \cos \varphi \rangle$. Protože jakobián je ϱ , můžeme podle Věty 3.12 psát

$$\begin{aligned} \iint_T \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} &= \int_{\pi/4}^{\arctg 2} \int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} \frac{1}{\varrho^4} \varrho \, d\varrho \, d\varphi = \int_{\pi/4}^{\arctg 2} \left[-\frac{1}{2\varrho^2} \right]_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \int_{\pi/4}^{\arctg 2} \frac{3}{128 \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{3}{128} [\operatorname{tg} \varphi]_{\pi/4}^{\arctg 2} = \frac{3}{128}. \end{aligned}$$

Úloha. Vyjádřete integrál

$$\int_0^1 \int_0^{2-y} f \, dx \, dy$$

v polárních souřadnicích při obou možnostech pořadí integrace.

Řešení. Nejprve musíme zjistit tvar oblasti T přes kterou se integrace provádí: z tvaru mezi u vnějšího a vnitřního integrálu vidíme, že

$$0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 2 - y.$$

(28) M , $H = \{ (x+y)^4 < a x^2 y, x > 0 \}, a > 0$

$$x = r \cos^2 \alpha$$

$$r \in (0, \infty)$$

$$y = r \sin^2 \alpha$$

$$\alpha \in (0, \pi/2) \text{ упр.}$$

$$J_{\varphi} = r \sin 2\alpha$$

$$\varphi^{-1}(M) : 0 < r^4 < a r^3 \cos^4 \sin^2 \alpha$$

$$0 < y \rightarrow 0 < r \sin^2 \alpha$$

$$\pi/2 \quad a \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha} r \sin 2\alpha \, dr \, d\alpha = \int_0^{\pi/2} \sin 2\alpha \, d\alpha \cdot \frac{1}{2} \left[r^2 \right]_0^{a \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot a^2 \cos^8 \alpha \sin^4 \alpha \, d\alpha =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^9 \alpha \sin^5 \alpha \, d\alpha = \frac{a^2}{240}$$

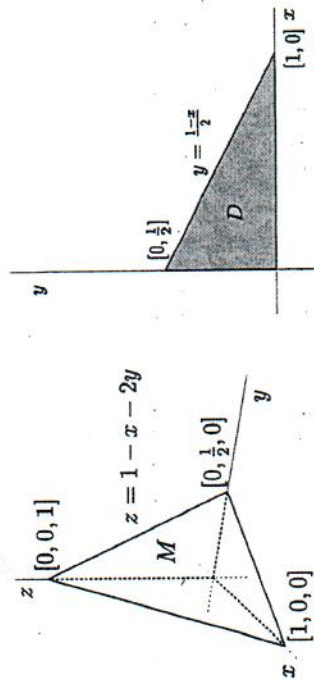
Příklad B. Vypočítejte $\int_M (x^2 + y^2) dx dy$, je-li M ohraničena přímkami $y = 0$, $x + y = 1$ a $y - x = 1$ (viz obrázek 2.4 vpravo).

Řešení. Podle tvaru oboru integrace usoudíme, že bude výhodnější nejdříve integrovat podle x a pak podle y (tj. vnitřní integrál podle x a vnější podle y). M je definováno nerovnostmi $0 < y < 1$ a $-1 + y < x < 1 - y$. Podle Fubiniovy věty pak máme

$$\int_M (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{-1+y}^{1-y} (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{y-1}^{1-y} dy = \frac{1}{3}.$$

Šlo by také postupovat tak, že bychom množinu M rozdělili na dva trojúhelníky (jeden vpravo od osy y a druhý vlevo) a hledaný integrál bychom dostali jako součet integrálů přes tyto trojúhelníky. A integrály přes trojúhelníky už můžeme počítat i tak, že nejdřív integrujeme podle y . Proveďte za cvičení a porovnejte oba postupy.

Příklad C. Vypočítejte $\int_M x dx dy dz$, kde M je čtyřlíst, omezený souřadnicovými rovinami a rovinou $x + 2y + z = 1$ (viz obrázek 2.5 vlevo).



OBR. 2.5

Řešení. Průmětem čtyřlístu do roviny $z = 0$ je trojúhelník D , omezený osami x a y a přímkou $x + 2y = 1$ (viz obrázek 2.5 vpravo). Podle

Fubiniovy věty je

$$\begin{aligned} \int_M x dx dy dz &= \int_D x \left(\int_0^{1-x-2y} dz \right) dx dy = \int_D x(1-x-2y) dx dy = \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^{(1-x)/2} (1-x-2y) dy = \int_0^1 x \left[y - xy - y^2 \right]_0^{(1-x)/2} dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

Příklad D. Vypočítejte plošný obsah $\mu(D)$ části D roviny, omezené hyperbolami $xy = a$, $xy = b$, $0 < a < b$ a parabolami $y^2 = mx$, $y^2 = nx$, $0 < m < n$.

Řešení. Zvolme transformaci souřadnic ψ danou rovnicemi $xy = u$, $y^2/x = v$, kde u, v jsou kladná. Zobrazení je prosté, neboť je $x = \sqrt[3]{u^2/v}$, $y = \sqrt[3]{uv}$, nový obor integrace je obdélník $a < u < b$, $m < v < n$. Pro Jacobiho determinant dostáváme

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{2/3}v^{-4/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3v},$$

a je proto

$$\mu(D) = \int_D dx dy = \frac{1}{3} \int_a^b \int_m^n \frac{du dv}{v} = \frac{1}{3} \int_a^b du \int_m^n \frac{dv}{v} = \frac{1}{3} (b-a) \ln\left(\frac{n}{m}\right).$$

Příklad E. Vypočítejte plošný obsah parabolické úseče D , ohraničené parabolou $(x/a + y/b)^2 = x/a - y/b$ a osou x , kde a, b jsou daná kladná čísla.

Řešení. Zvolíme transformaci souřadnic ψ danou rovnicemi $u = x/a + y/b$, $v = x/a - y/b$, neboli $x = a(u+v)/2$, $y = b(u-v)/2$. V nových souřadnicích má parabola rovnici $v = u^2$, osa x se zobrazí na přímku $u = v$, Jacobian transformace je roven $J = -ab/2$, a proto máme

$$\mu(D) = \frac{ab}{2} \int_0^1 \int_{u^2}^u du dv = \frac{1}{12} ab.$$

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ a $y = \sqrt{uv}$ a spočítáme Jakobián.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{uv}}{v^2} \\ \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{uv}} & \frac{1}{2} \frac{u}{\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $|J| = \frac{1}{2v}$ dostaneme

$$\int_M x^2 y^2 dA = \int_1^3 \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{u^2}{v} dv du = \frac{13 \ln 2}{2}.$$

Poznámka: Při řešení předchozího příkladu byl asi nejpracnější výpočet Jakobiánu. Při jeho výpočtu jsme si ale mohli usnadnit práci, kdybychom využili vlastosti regulárního zobrazení a zobrazení k němu inverzního. Platí totiž

$$J(u, v) = \frac{1}{J(x(u, v), y(u, v))}.$$

Pro $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ je tedy

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x}.$$

Dosazením za $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ a $y = \sqrt{uv}$ pak dostáváme $J(x(u, v), y(u, v)) = 2v$. Odtud pak

$$J(u, v) = \frac{1}{2v}.$$

Příklad 1.23. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M \frac{y^3}{x^3} dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x} \wedge x \leq y \leq 2x\}$.

Řešení: Množina M je dána nerovnicemi

$$\frac{2}{x} \leq y \leq \frac{3}{x} \wedge x \leq y^2 \leq 2x,$$

tj.

$$(3) \quad 2 \leq xy \leq 3 \wedge 1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 2.$$

Zvolme nyní substituci $u = xy$ a $v = \frac{y^2}{x}$. Dosazením u a v do (3) dostaneme

$$1 \leq u \leq 3 \quad \wedge \quad 1 \leq v \leq 2.$$

Ze zvolené substituce si vyjádříme $x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}}$, $y = \sqrt[3]{uv}$ a spočítáme Jakobián. Pro výpočet Jakobiánu použijeme předchozí poznámku. Je tedy

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3y^2}{x}.$$

Dosazením za $x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}}$, $y = \sqrt[3]{uv}$ pak dostáváme $J(x(u, v), y(u, v)) = 3v$. Odtud pak

$$J(u, v) = \frac{1}{3v}.$$

Dosazením do integrálu za x a y a dále $|J| = \frac{1}{3v}$ dostaneme

$$\int_M \frac{y^3}{x^3} dA = \int_2^3 \int_1^2 \frac{1}{3} \frac{u}{v} dv du = \frac{5 \ln 2}{6}.$$

Příklad 1.24. Vypočítejme dvojný integrál

$$\int_M \sqrt{x^2 + y^2} dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$.

Řešení: Při výpočtu tohoto integrálu použijeme substituci do polárních souřadnic

$$(4) \quad x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \quad \text{a} \quad J = r.$$

V našem případě je M (Obr. 7) obrazem obdélníku $N = \langle 1, 2 \rangle \times \langle \pi/4, \pi/3 \rangle$ jak zjistíme dosazením za x a y z (4) do nerovnic popisujících množinu M

$$\begin{aligned} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, & \quad x \leq y \leq \sqrt{3}x, \\ 1 \leq r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi \leq 4, & \quad r \cos \phi \leq r \sin \phi \leq \sqrt{3}r \cos \phi, \\ 1 \leq r \leq 2, & \quad 1 \leq \tan \phi \leq \sqrt{3}, \\ & \quad \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Použitím věty o substituci ve dvojném integrálu a Fubiniovy věty pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int_M \sqrt{x^2 + y^2} dA &= \int_N \sqrt{r^2} r dA^* = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_1^2 r^2 dr d\phi = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 d\phi = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{7}{3} d\phi = \frac{7}{36} \pi. \end{aligned}$$

Příklad 1.25. Vypočítejme objem tělesa, které je ohraničeno plochami $x^2 + y^2 = x + y$, $z = x + y$ a $z = 0$.

Bonusové cvičení 28.4.

<http://www.web.natur.cuni.cz/~kunc6am/>

kristyna.m.kuncova@natur.cuni.cz

Hinty

Příklady

1. Změňte pořadí integrace

$$(a) \int_2^3 \int_2^{8-2x} f(x,y) dy dx \quad (c) \int_0^\infty \int_0^x f(x,y) dy dx$$

$$(b) \int_0^1 \int_0^{e^y} f(x,y) dx dy$$

2. Určete, zda jsou integrály ve správném pořadí či nikoli

(a) i. *Ano* $\int_{-4}^e \int_1^3 \int_0^2 xyz^2 dz dy dx$ iii. *Ano* $\int_1^3 \int_0^2 \int_{-4}^e xyz^2 dx dz dy$

ii. *Ano* $\int_0^2 \int_1^3 \int_{-4}^e xyz^2 dx dy dz$

(b) i. *Ano* $\int_0^3 \int_x^{x^2} \int_y^{y+2} \frac{x}{z} \cos y dz dy dx$ iii. *Ne* $\int_x^{x^2} \int_y^{y+2} \int_0^3 \frac{x}{z} \cos y dx dz dy$

ii. *Ne* $\int_0^3 \int_y^{y+2} \int_x^{x^2} \frac{x}{z} \cos y dy dz dx$ iv. *Ne* $\int_y^{y+2} \int_x^{x^2} \int_0^3 \frac{x}{z} \cos y dx dy dz$

(c) i. *Ano* $\int_0^1 \int_{-\pi}^\pi \int_{\cos \alpha}^{3 \cos \alpha} \sqrt{z} r^2 \sin \alpha dr d\alpha dz$ iii. *Ano* $\int_{-\pi}^\pi \int_{\cos \alpha}^{3 \cos \alpha} \int_0^1 \sqrt{z} r^2 \sin \alpha dz dr d\alpha$

ii. *Ano* $\int_{-\pi}^\pi \int_0^1 \int_{\cos \alpha}^{3 \cos \alpha} \sqrt{z} r^2 \sin \alpha dr dz d\alpha$ iv. *Ne* $\int_0^1 \int_{\cos \alpha}^{3 \cos \alpha} \int_{-\pi}^\pi \sqrt{z} r^2 \sin \alpha d\alpha dr dz$

3. Zapište následující množiny nerovnicí a polárními souřadnicemi

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos t \, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} w^2 \, dw = \left[\frac{w^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} (3\sqrt{3} - 1),$$

užili jsme substituci $w := \sin t$, a tedy $dw = \cos t \, dt$, $\frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{1}{2}$ a $\frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Příklad 8.15:

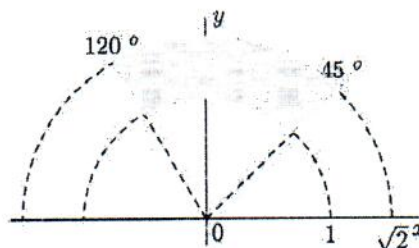
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} x^2 y \, dx dy,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.

řešení:

Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, \sqrt{2} \rangle \times \langle \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} \rangle$ a užijeme (*)



$$\iint_{\Omega} x^2 y \, dx dy = \iint_{\langle 1, \sqrt{2} \rangle \times \langle \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} \rangle} r^4 \sin t \cos^2 t \, dr dt = \underbrace{\int_1^{\sqrt{2}} r^4 \, dr}_{=\frac{1}{5}(4\sqrt{2}-1)} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t \cos^2 t \, dt}_{=\frac{1}{31}(2\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{120} (15 + 2\sqrt{2}).$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t \cos^2 t \, dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{1}{2}} -w^2 \, dw = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} w^2 \, dw = \left[\frac{w^3}{3} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{24} (2\sqrt{2} + 1),$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $dw = -\sin t \, dt$, $\frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\frac{2\pi}{3} \rightsquigarrow -\frac{1}{2}$.

Příklad 8.16:

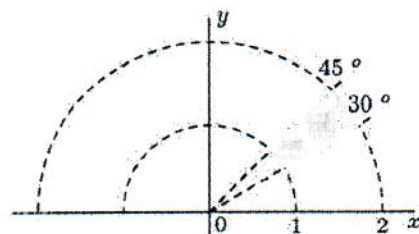
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{x^2 y} \, dx dy,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.

řešení:

Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 2 \rangle \times \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \rangle$ a užijeme (*)



$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} xy \, dx dy &= \iint_{\langle 1, 2 \rangle \times \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \rangle} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\sin t \cos^2 t} \, dr dt = \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{r^2} \, dr}_{=-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t \, dt}{(1 - \cos^2 t) \cos^2 t}}_{=\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(1 + \sqrt{2})} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t \, dt}{(1 - \cos^2 t) \cos^2 t} &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dw}{(1 - w^2)w^2} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{2}{w^2} + \frac{1}{w+1} - \frac{1}{w-1} \right) dw = \\ &= \left[-\frac{1}{w} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1+w}{1-w} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(1 + \sqrt{2}), \end{aligned}$$

(volíme kladné u, v), proto vzor množiny Ω při uvedené transformaci bude obdélník $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 3 \rangle \times \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$. Nyní už stačí dosadit a vypočítat

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{1}{y\sqrt{x}} dx dy &= \iint_{\langle 1, 3 \rangle \times \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle} \frac{1}{\frac{u}{v}\sqrt{uv}} \cdot \frac{2u}{v} du dv = \\ &= 2 \iint_{\langle 1, 3 \rangle \times \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle} \frac{du dv}{\sqrt{uv}} = 2 \int_1^3 \frac{du}{\sqrt{u}} \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dv}{\sqrt{v}} = 8 [\sqrt{u}]_1^3 \cdot [\sqrt{v}]_{\frac{1}{2}}^1 = 8(\sqrt{3}-1) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

V dalších příkladech budeme užívat větu o substituci pro polární souřadnice

$$\Phi: \begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \end{aligned}$$

Protože

$$|\det D\Phi| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -r \sin t & r \cos t \end{pmatrix} \right| = |r \cos^2 t + r \sin^2 t| = r,$$

dostaneme

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r \cos t, r \sin t) \cdot r du dv. \quad (*)$$

Příklad 8.6:

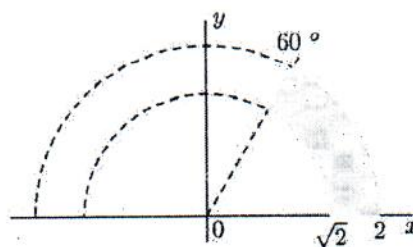
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} \frac{y}{x} dx dy,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.

Řešení:

Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle \sqrt{2}, 2 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle$ a užijeme (*)



$$\iint_{\Omega} \frac{y}{x} dx dy = \iint_{\langle \sqrt{2}, 2 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle} r \frac{\sin t}{\cos t} dr dt = \underbrace{\int_{\sqrt{2}}^2 r dr}_{=1} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos t} dt}_{=\ln 2} = \ln 2.$$

Uvedeme výpočty jednotlivých integrálů

$$\int_{\sqrt{2}}^2 r dr = \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\sqrt{2}}^2 = 2 - 1 = 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos t} dt = \int_1^{\frac{1}{2}} -\frac{dw}{w} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dw}{w} = [\ln |w|]_{\frac{1}{2}}^1 = \ln 2,$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $dw = -\sin t dt$, $0 \rightsquigarrow 1$ a $\frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \frac{1}{2}$.

Příklad 8.7:

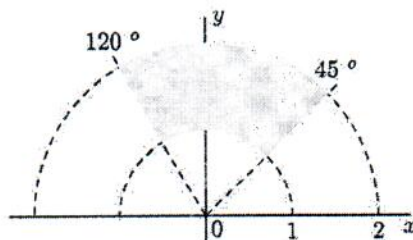
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} x^2 y dx dy,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.

Řešení:

Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 2 \rangle \times \langle \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} \rangle$ a užijeme (*)

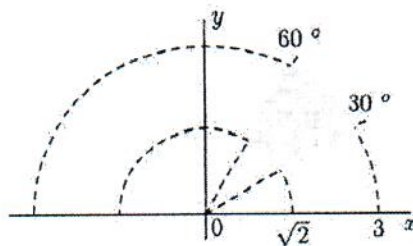


$$\iint_{\Omega} x^2 y dx dy = \iint_{\langle 1, 2 \rangle \times \langle \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} \rangle} r^4 \sin t \cos^2 t dr dt = \underbrace{\int_1^2 r^4 dr}_{=\frac{31}{5}} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t \cos^2 t dt}_{=\frac{1}{24}(2\sqrt{2}+1)} = \frac{31}{120} (2\sqrt{2} + 1).$$

Příklad 8.10:

Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} \frac{y}{x^2} dx dy,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.**řešení:**Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle \sqrt{2}, 3 \rangle \times \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \rangle$ a užijeme (*)

$$\iint_{\Omega} \frac{y}{x^2} dx dy = \iint_{\langle \sqrt{2}, 3 \rangle \times \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \rangle} \frac{\sin t}{\cos^2 t} dr dt = \underbrace{\int_{\sqrt{2}}^3 1 dr}_{=3-\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt}_{=\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(3-\sqrt{2})(\sqrt{3}-1).$$

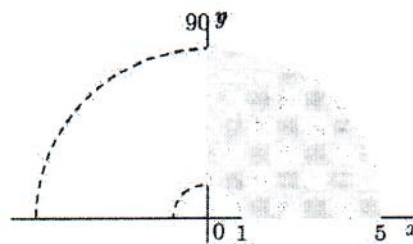
Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dw}{w^2} = \left[-\frac{1}{w} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} + 2 = \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1),$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $dw = -\sin t dt$, $\frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \frac{1}{2}$.**Příklad 8.11:**

Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} \frac{x}{x^2 + 2y^2} dx dy,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.**řešení:**Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 5 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ a užijeme (*)

$$\iint_{\Omega} \frac{x}{x^2 + 2y^2} dx dy = \iint_{\langle 1, 5 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle} \frac{r \cos t}{r^2 \cos^2 t + 2r^2 \sin^2 t} r dr dt = \underbrace{\int_1^5 1 dr}_{=4} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} dt}_{=\frac{\pi}{4}} = \pi.$$

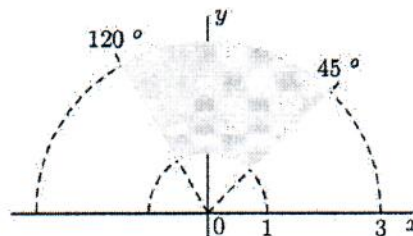
Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} dt = \int_0^1 \frac{1}{1 + w^2} dw = [\arctg w]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

užili jsme substituci $w := \sin t$, a tedy $dw = \cos t dt$, $0 \rightsquigarrow 0$ a $\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 1$.**Příklad 8.12:**

Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} xy dx dy,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.**řešení:**Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 3 \rangle \times \langle \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} \rangle$ a užijeme (*)

$$\iint_{\Omega} xy dx dy = \iint_{\langle 1, 3 \rangle \times \langle \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} \rangle} r^3 \sin t \cos t dr dt = \underbrace{\int_1^3 r^3 dr}_{=\frac{r^4}{4} \Big|_1^3 = 20} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t \cos t dt}_{=-\frac{1}{8}} = \frac{5}{2}.$$